

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de São Carlos

**Simulação em elementos finitos de lajes steeldeck,
bublédeck e alveolar empregando técnicas de
imersão**

Rodrigo Souza de Melo

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade
de São Paulo

Rodrigo Souza de Melo

**Simulação em elementos finitos de lajes steeldeck,
bubbledeck e alveolar empregando técnicas de imersão**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rogério Carrazedo

VERSÃO CORRIGIDA

São Carlos

2025

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

S528s Souza de Melo, Rodrigo
Simulação em elementos finitos de lajes
steeldeck, bubbledeck e alveolar empregando técnicas de
imersão e modelo de dano contínuo / Rodrigo Souza de
Melo; orientador Rogério Carrazedo. São Carlos, 2025.

Dissertação (Mestrado) - Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de
Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas --
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo, 2025.

1. Concreto armado. 2. Lajes steeldeck. 3. Lajes
bubbledeck. 4. Lajes alveolares. 5. Modelo de dano para
o concreto. 6. Método dos elementos finitos. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **RODRIGO SOUZA DE MELO**.

Título da dissertação: "Simulação em elementos finitos de lajes steeldeck, bubbledeck e alveolar empregando técnicas de imersão".

Data da defesa: 09/06/2025.

Comissão Julgadora

Prof. Associado Rogério Carrazedo
(Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC-USP)

Prof. Dr. Marcos Arndt
(Universidade Federal do Paraná/UFPR)

Prof. Dr. Gustavo Henrique Siqueira
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Resultado

APROVADO

Aprovado

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Ricardo Carrazedo**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**

RESUMO

MELO, R. S. **Simulação em elementos finitos de lajes steeldeck, bubbledeck e alveolar empregando técnicas de imersão.** 2025. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

Com o desenvolvimento da engenharia e a constante busca por modelos construtivos mais práticos e econômicos, diversas alternativas a lajes convencionais de concreto armado têm surgido. Dentre elas, destacam-se as lajes *steeldeck*, *bubbledeck* e alveolar. Estes modelos têm em comum a inclusão de diferentes elementos no concreto, sejam estes reforços, que contribuem para o desempenho contra esforços, ou vazios, que otimizam o consumo de material e o peso próprio. Partindo desta perspectiva e considerando a importância de modelagens numéricas para o estudo das estruturas, é proposta uma formulação numérica em elementos finitos direcionada a estes três tipos de laje, adotando elementos sólidos para representar a matriz de concreto e utilizando técnicas de imersão para caracterizar os demais componentes, sejam estas inclusões ou exclusões. A formulação abrange as não linearidades geométrica e física, esta última sendo representada por um modelo de dano contínuo modificado para viabilizar a sua aplicação nos exemplos selecionados. Para implementar a formulação, é desenvolvido um código computacional. A validação da teoria e do código desenvolvidos é realizada a partir da simulação de experimentos consolidados na literatura.

Palavras-chave: Concreto armado. Lajes *steeldeck*. Lajes *bubbledeck*. Lajes alveolares. Modelo de dano para o concreto. Método dos elementos finitos.

ABSTRACT

MELO, R. S. **Finite element simulation of steel deck, bubble deck and hollow core slabs applying immersion techniques**. 2025. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

With the advancement of engineering and the constant chase for more practical and economical construction systems, various alternatives to conventional reinforced concrete slabs have been popping up. Among those, steel deck, bubble deck and hollow core slabs stand out. Those systems have in common the inclusion of elements in the concrete, such as reinforcements, which contribute to the performance against loads, and voids, to optimise material usage and self-weight. With this perspective and considering the importance of numerical modeling to the study of structures, a numeric finite element formulation directed to these three types of slabs is proposed, adopting solid elements to represent the concrete matrix and using immersion techniques to characterise the remaining components, be those inclusions or hollows. The formulation covers geometric and physical nonlinearities, the latter represented by a continuous damage model that is modified to make its application in the selected examples viable. To implement the formulation, a computational code is developed. Validation of the developed theory and code is performed with the simulation of experiments established in literature.

Keywords: Reinforced concrete. Steel deck slabs. Bubble deck slabs. Hollow core slabs. Damage model for concrete. Finite element method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Esquema em 3D de uma laje <i>steeldeck</i> .	15
Figura 2	– Esquema em 3D de uma laje <i>bubbledeck</i> .	16
Figura 3	– Laje alveolar em processo de produção por extrusão.	16
Figura 4	– Laje com alvéolos criados por canos de PVC.	17
Figura 5	– Elementos de face ativa imersos em elementos prismáticos.	18
Figura 6	– Elementos de uma laje <i>steeldeck</i> .	20
Figura 7	– Comportamento de uma laje <i>steeldeck</i> ensaiada à flexão.	21
Figura 8	– Esquema em planta de uma laje <i>bubbledeck</i> .	22
Figura 9	– Chapas transversais de reforço a uma laje <i>bubbledeck</i> .	23
Figura 10	– Seção transversal de uma laje alveolar pré-moldada de concreto protendido.	23
Figura 11	– Mapeamento de um elemento prismático.	27
Figura 12	– Polinômios de Lagrange para $n = 2$ e $n = 4$.	29
Figura 13	– Elementos triangulares de aproximação linear, quadrática e cúbica.	29
Figura 14	– Elemento prismático no domínio adimensional.	30
Figura 15	– Elemento de fibra imerso em elementos de matriz.	39
Figura 16	– Malha com elementos de face ativa.	45
Figura 17	– Elemento retangular nos sistemas global e local.	45
Figura 18	– Elemento hexaédrico em seus formatos (a) adimensional e (b) esférico.	47
Figura 19	– Elementos prismáticos adjacentes aproximados para formato cilíndrico.	48
Figura 20	– Janela do AcadView.	60
Figura 21	– Janela do Gnuplot.	61
Figura 22	– Fluxograma do código computacional.	62
Figura 23	– Exemplo 1: Viga ensaiada (dimensões em cm, armaduras em mm).	64
Figura 24	– Exemplo 1: Malhas da matriz de concreto.	65
Figura 25	– Exemplo 1: Resultados.	65
Figura 26	– Exemplo 1: Tensões longitudinais (em Pa) na malha de 52 elementos.	66
Figura 27	– Exemplo 1: Tensões longitudinais (em Pa) na malha de 624 elementos.	66
Figura 28	– Exemplo 1: Tensões longitudinais (em Pa) na malha de 1.040 elementos.	66
Figura 29	– Exemplo 2: Perfil KF-70 (dimensões em mm).	67
Figura 30	– Exemplo 2: Malha da matriz de concreto e elementos imersos.	68
Figura 31	– Exemplo 2: Resultados.	69
Figura 32	– Exemplo 2: Tensões longitudinais (em Pa) no concreto e no <i>deck</i> .	70
Figura 33	– Exemplo 3: Dimensões da laje.	70
Figura 34	– Exemplo 3: Detalhe do espaçamento das armaduras de reforço.	71
Figura 35	– Exemplo 3: Disposição dos vazios na laje V0.0.	71
Figura 36	– Exemplo 3: Malha da matriz de concreto e elementos imersos.	72

Figura 37 – Exemplo 3: Resultados (laje S).	73
Figura 38 – Exemplo 3: Resultados (laje V0.0).	73
Figura 39 – Exemplo 3: Pontos danificados em simulação do exemplar V0.0.	75
Figura 40 – Exemplo 4: Seção transversal da laje (dimensões em mm).	75
Figura 41 – Exemplo 4: Malha da matriz de concreto e elementos imersos.	76
Figura 42 – Exemplo 4: Resultados.	77

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Pontos e pesos de integração de Gauss-Legendre ($n_g = 4$).	38
Tabela 2 – Pontos e pesos de integração de Hammer ($n_h = 12$).	38
Tabela 3 – Intervalos dos parâmetros do modelo de dano.	52
Tabela 4 – Deformações compressivas L_{c1} e L_{c2} por classe do concreto (até C120).	53
Tabela 5 – Exemplo 1: Parâmetros extraídos de Alvares (1993).	63
Tabela 6 – Exemplo 1: Parâmetros calculados.	64
Tabela 7 – Exemplo 2: Parâmetros calculados.	68
Tabela 8 – Exemplo 3: Parâmetros calculados.	72
Tabela 9 – Exemplo 3: Carga máxima atingida para diferentes parâmetros de convergência.	74
Tabela 10 – Exemplo 4: Parâmetros calculados.	76
Tabela 11 – Exemplo 4: Carga máxima atingida para diferentes parâmetros de convergência.	77

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Objetivos	19
1.1.1	Objetivos específicos	19
1.2	Revisão bibliográfica	20
1.2.1	Lajes <i>steeldeck</i>	20
1.2.2	Lajes <i>bubbledeck</i>	21
1.2.3	Lajes alveolares	23
1.3	Justificativa	24
1.4	Estrutura do trabalho	25
2	O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL	27
2.1	Funções aproximadoras	28
2.2	Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff	31
2.3	Estacionariedade da energia mecânica	33
2.4	Método de Newton-Raphson para solução de sistemas não lineares	35
2.5	Quadraturas de Gauss-Legendre e Hammer para integrações numéricas	36
2.6	Técnicas de imersão	38
2.6.1	Incidência de nós imersos independentes	39
2.6.2	Contribuição de elementos imersos com nós independentes	40
2.6.3	Elementos imersos de treliça	42
2.6.4	Elementos imersos de face ativa	45
2.6.5	Elementos imersos tridimensionais vazios	47
3	MODELO DE DANO	49
3.1	Modelo de dano contínuo de Mazars	49
3.2	Adaptação do modelo de dano contínuo	52
4	ESTRUTURA DO CÓDIGO COMPUTACIONAL	55
4.1	Leitura de dados e pré-processamento	55
4.2	Processamento dos dados	56
4.2.1	Considerações para problemas com dano e exclusões	57
4.3	Pós-processamento e impressão dos dados de saída	59
4.3.1	Impressão da malha no AcadView	60
4.3.2	Impressão de dados para gráficos no Gnuplot	61
4.4	Fluxograma	61
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	63

5.1	Alvares (1993): Danificação de viga	63
5.2	Gholamhoseini <i>et al.</i> (2014): Laje <i>steeldeck</i>	67
5.3	Al-Gasham, Mhalhal e Jabir (2019): Laje <i>bubbledeck</i>	70
5.4	Sahoo <i>et al.</i> (2023): Laje alveolar	75
6	CONCLUSÕES	79
6.1	Perspectivas para futuros trabalhos	80
	REFERÊNCIAS	81

1 INTRODUÇÃO

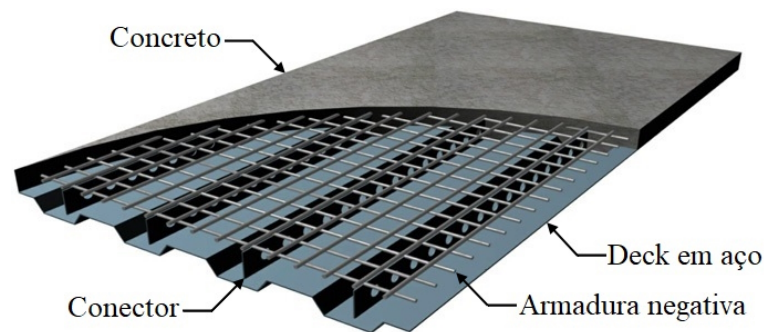
O concreto é um dos materiais de construção mais utilizados do mundo graças a fatores como seu baixo custo, boa trabalhabilidade e elevada resistência à compressão. Porém algumas de suas características menos favoráveis, como a baixa resistência à tração e o peso próprio elevado, tornam desejável que se agregue ao concreto outros materiais que supram estas deficiências, e que se pense em modelos construtivos que reduzam o volume de concreto sem que haja grande impacto na resistência da estrutura como um todo.

Uma das composições de materiais mais utilizadas no Brasil e no mundo é o concreto armado, que combina a resistência compressiva e capacidade de isolamento a intempéries do concreto com a elevada resistência à tração do aço no formato de barras. Vigas, pilares e lajes de concreto armado compõem de obras de pequeno porte a estruturas monumentais ao redor do mundo.

Embora o setor da construção civil brasileiro seja bastante fiel aos métodos tradicionais, outros modelos construtivos baseados no concreto têm sido aplicados com o objetivo de proporcionar mais economia, praticidade construtiva, ou até mesmo viabilizar determinadas soluções para construções. Entre os modelos alternativos de concepção de lajes, destacam-se as lajes *steeldeck*, *bubbledeck* e alveolar, selecionadas para estudo no presente trabalho.

Presentes em edificações estruturadas em aço, as lajes *steeldeck* consistem em um *deck* de aço coberto por concreto. O *deck* tem a dupla função de servir de forma permanente para o concreto e prover resistência à tração advinda dos momentos positivos atuantes na laje. Outros elementos que podem estar presentes são conectores de cisalhamento, armaduras negativas e reforços positivos adicionais (Figura 1).

Figura 1 – Esquema em 3D de uma laje *steeldeck*.

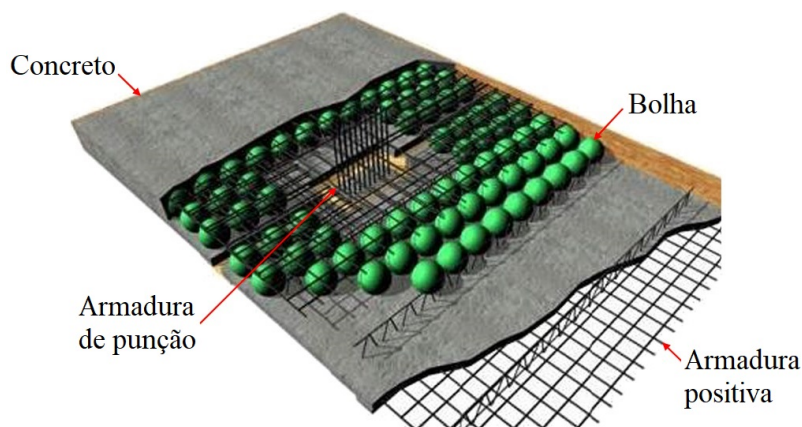


Fonte: adaptado de Kim e Jeong (2010).

Já em edificações baseadas em concreto armado, uma alternativa que vem se popularizando são as lajes lisas, que dispensam a necessidade de vigas para suportá-

las. Para combater o empecilho da grande espessura de laje necessária nestes modelos estruturais, surgiram concepções otimizadas como as lajes *bubbledeck*. Estas lajes substituem regiões do concreto menos solicitadas por esferas de plástico ocas, ou “bolhas” (Figura 2).

Figura 2 – Esquema em 3D de uma laje *bubbledeck*.



Fonte: adaptado de Hashemi *et al.* (2018).

Utilizando do mesmo princípio para reduzir o peso próprio, as lajes alveolares possuem vazios que se estendem longitudinalmente. Um sistema comum que aplica este princípio é o de lajes alveolares pré-moldadas, produzidas por extrusão e geralmente reforçadas com aço protendido (Figura 3), que atuam em conjunto com uma camada superior de concreto moldado *in loco*. Porém, a introdução de alvéolos também pode ser feita em lajes moldadas completamente *in loco* com o posicionamento, por exemplo, de isopor ou canos de PVC na laje durante o lançamento (Figura 4).

Figura 3 – Laje alveolar em processo de produção por extrusão.



Fonte: Cuenca e Serna (2013).

Figura 4 – Laje com alvéolos criados por canos de PVC.



Fonte: Sahoo *et al.* (2023).

Com o crescente interesse nestes modelos, também é crescente a realização de estudos na literatura investigando o seu comportamento, seja através de experimentos ou de simulações numéricas. Para fins de modelagem numérica em elementos finitos, estes três tipos de laje têm algo em comum: eles podem ser pensados como uma matriz de concreto com elementos nela imersos, sejam estas barras de aço, *decks* ou vazios.

Em elementos finitos, a imersão consiste em adicionar elementos à simulação sem criar novos graus de liberdade. Para isto, é criada a malha de uma matriz — para os fins deste trabalho, a matriz sempre é o concreto —, e os elementos imersos são convertidos em contribuições positivas ou negativas à sua rigidez. Esta técnica é comum para a modelagem de barras de aço, mas em geral, modelaria-se um *deck* adicionando novos graus de liberdade, e regiões vazias (exclusões) seriam criadas pela própria geometria da malha. Aplicar a imersão nestes casos implica na redução do número de graus de liberdade do problema, e além disso na simplificação do formato da malha quando aplicada a vazios.

Assim sendo, o presente trabalho se propõe a aplicar uma formulação numérica baseada em elementos finitos para a análise estática de lajes *steeldeck*, *bubbledeck* e alveolares utilizando elementos imersos. Será feita a modelagem da matriz de concreto, e os demais elementos — inclusões e exclusões — serão a esta associados por técnicas de imersão.

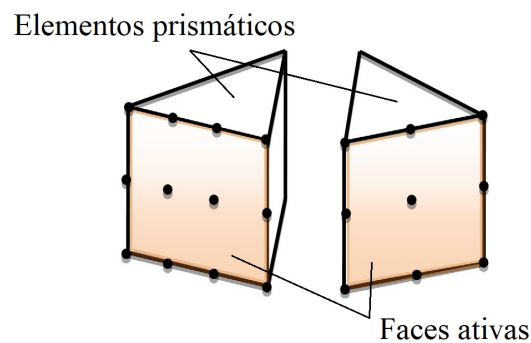
A abordagem numérica adotada é o método dos elementos finitos posicional (MEFP), uma variação do método dos elementos finitos (MEF) que utiliza as posições atuais dos nós como variáveis ao invés dos deslocamentos. Esta adaptação foi introduzida independentemente por Bonet *et al.* (2000), para analisar estruturas de membrana infladas, e por Coda e Greco (2004), visando a análise de pórticos 2D.

Aplicações do MEFP foram expandidas para treliças espaciais (Greco *et al.*, 2006), cascas (Coda; Paccola, 2007), pórticos 3D (Coda; Paccola, 2010), entre outros. Carrazedo e Coda (2017) desenvolveram um elemento prismático de base triangular de qualquer ordem para descrever vigas, placas e cascas.

Em contribuição ao método, Sampaio, Paccola e Coda (2013) introduziram o conceito de imersão em elementos bidimensionais através de fibras (elementos de treliça), que posteriormente foram aplicadas a elementos sólidos com a consideração do descolamento por Paccola, Piedade Neto e Coda (2015). Félix (2022) aplicou exclusões em meio bidimensional para representar o dano em estruturas de concreto.

Expandindo o conceito de imersão de elementos, Carrazedo, Paccola e Coda (2018) agregaram elementos de membrana de face ativa para representar placas e cascas sanduíche com núcleo *honeycomb*, possibilitando o posterior estudo dos modos de vibração dessas estruturas por Carrazedo *et al.* (2020). A membrana de face ativa consiste em um elemento 2D imerso coincidente com uma das faces do elemento prismático, garantindo rigidez adicional à matriz (Figura 5).

Figura 5 – Elementos de face ativa imersos em elementos prismáticos.



Fonte: adaptado de Carrazedo *et al.* (2020).

A realização deste trabalho é amplamente baseada nas contribuições mencionadas. Elementos prismáticos de base triangular (Carrazedo; Coda, 2017) são utilizados para representar a matriz de concreto em todas as lajes. Para os demais elementos das lajes — barras de aço, *deck* e vazios — o conceito de imersão é aplicado. Além de elementos de barra e planos, propõe-se também a imersão de elementos tridimensionais na matriz prismática.

Neste sentido, elementos de treliça ou fibras (Sampaio; Paccola; Coda, 2013) representam as barras de reforço. O *deck* da laje *steeldeck* é representado por elementos bidimensionais de membrana de face ativa (Carrazedo; Paccola; Coda, 2018). Introduzindo a imersão de elementos tridimensionais, as bolhas da laje *bubbledeck* são aproximadas por elementos imersos hexaédricos com propriedades negativas, representando o vazio.

Pelo mesmo princípio, os vazios da laje alveolar são modelados com elementos prismáticos imersos.

Ademais, a formulação é enriquecida com um modelo de dano para capturar a não linearidade física do concreto. O modelo selecionado foi o proposto por Mazars (1984). Uma desvantagem deste modelo é a necessidade da calibração de constantes sem significado físico. Para saná-lo e viabilizar as validações com exemplos da literatura que não realizam esta calibração, é utilizada uma modificação do modelo proposta por Arruda *et al.* (2022), que o torna dependente de propriedades físicas de fácil aferimento.

A formulação é validada através de sua implementação em um código computacional na linguagem de programação Fortran® e comparação dos resultados com estudos experimentais e numéricos consolidados na literatura. A obtenção de exemplos para comparação é fruto da revisão bibliográfica acerca dos três tipos de laje selecionados. Esta revisão é apresentada na seção 1.2.

É importante salientar que o foco em apenas três tipos de laje neste trabalho não significa que esta formulação não pode ser facilmente generalizada. A teoria desenvolvida para lajes *steeldeck* pode ser aplicada para quaisquer estruturas reforçadas por chapas, e as técnicas de imersão de exclusões aplicadas a lajes *bubbledeck* e alveolares podem ser adaptadas para vazios em geral. A seleção de tipos específicos de estruturas teve a mera função de delimitar o estudo da literatura e facilitar a coleta de exemplos para validação.

1.1 Objetivos

O objetivo geral do trabalho é aplicar uma formulação numérica por meio do MEFP para a análise estática de lajes *steeldeck*, *bubbledeck* e alveolar empregando elementos imersos e um modelo de dano contínuo, e implementá-la em um código computacional, validando-a com exemplos experimentais e numéricos da literatura.

1.1.1 Objetivos específicos

São objetivos específicos do presente trabalho:

- fazer uma revisão bibliográfica abrangendo estudos experimentais e numéricos das lajes *steeldeck*, *bubbledeck* e alveolar com o intuito de compreender o comportamento esperado destas lajes e coletar exemplos para validação;
- fazer uma revisão bibliográfica sobre o MEFP com ênfase em elementos imersos;
- fazer uma revisão bibliográfica sobre modelos de dano contínuo;
- especializar uma formulação em MEFP, adotando elementos unidimensionais, planos e sólidos, para a análise estática de lajes *steeldeck*, *bubbledeck* e alveolar com um modelo de dano contínuo para o concreto;

- desenvolver e validar um código de MEFP aplicando a formulação aplicada.

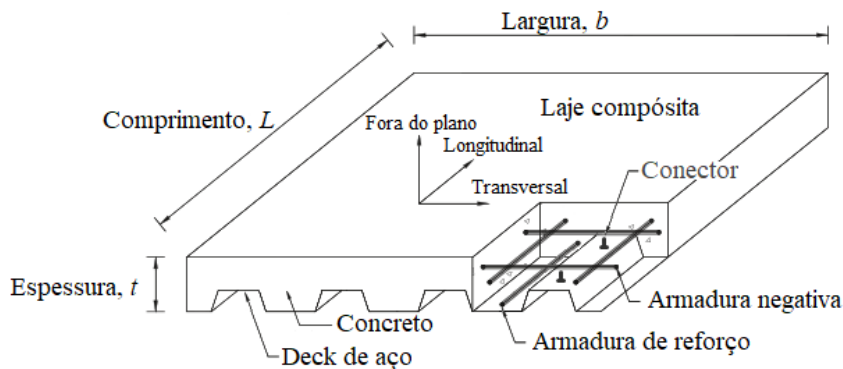
1.2 Revisão bibliográfica

Nesta seção, é apresentada a revisão bibliográfica realizada acerca de lajes *steeldeck*, *bubbledeck* e alveolares. A revisão que abrange os demais tópicos estudados, a saber, o método numérico e o modelo de dano, é abordada nos capítulos 2 e 3, respectivamente.

1.2.1 Lajes *steeldeck*

Os elementos básicos da laje *steeldeck* são a matriz de concreto e o *deck* de aço. Em geral, a parte superior da laje é reforçada com barras de aço para resistir aos momentos negativos. Outros elementos que podem estar presentes são barras de reforço positivo e conectores de cisalhamento (Figura 6).

Figura 6 – Elementos de uma laje *steeldeck*.



Fonte: adaptado de Gholamhoseini *et al.* (2014).

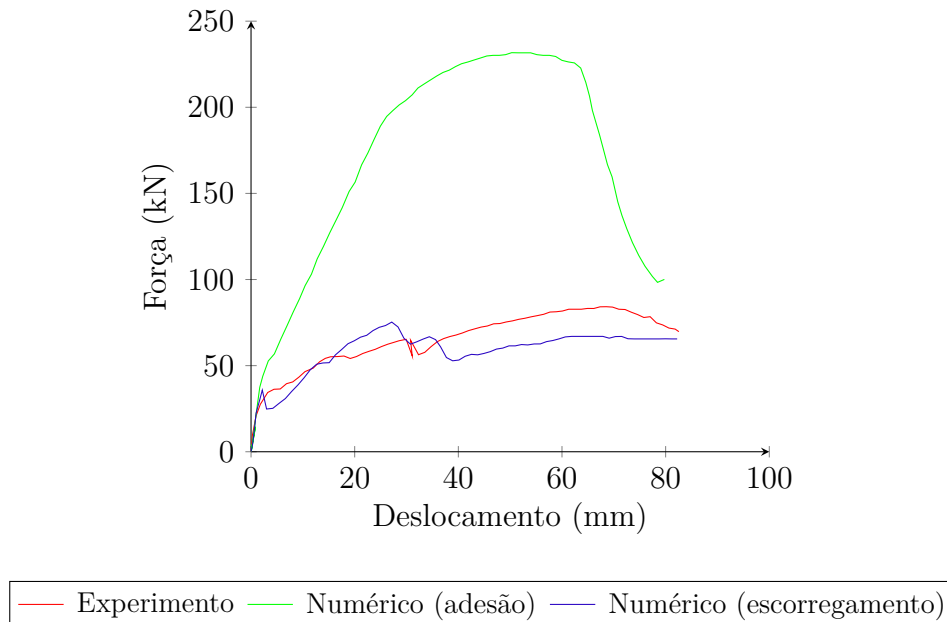
Menções da importância da adesão entre o concreto e o aço para o bom funcionamento da laje datam do trabalho de Stark (1978). Patrick e Bridge (1994) confrontaram os métodos de cálculo de sua época, que ignoravam esta propriedade, e desenvolveram um teste experimental que afere a performance da interface.

A modelagem do descolamento entre interfaces é recorrente em pesquisas numéricas. Por exemplo, Abdullah, Paton-Cole e Easterling (2007) utilizaram técnica para modelar o descolamento e o deslizamento independentemente entre si; Hossain, Attarde e Anwar (2019) modelaram o escorregamento com técnica de penalização; Ríos *et al.* (2017) propuseram uma lei de escorregamento bilinear que pode ser descrita com apenas dois pares de grandezas.

Gholamhoseini *et al.* (2014) ensaiaram lajes *steeldeck* à flexão e confrontaram os resultados com modelos numéricos: um com adesão perfeita entre os materiais, e um permitindo o escorregamento. Como visto na Figura 7, o modelo com adesão perfeita

se torna pouco realista após certo patamar de carga, superestimando a resistência da estrutura à flexão.

Figura 7 – Comportamento de uma laje *steeldeck* ensaiada à flexão.



Fonte: Gholamhoseini *et al.* (2014).

No Brasil, o dimensionamento de lajes *steeldeck* é regido pelo Anexo N da NBR 8800 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2021). O critério de segurança do cisalhamento entre as interfaces apresentado pela norma é o método semiempírico $m-k$. Neste método, m e k são parâmetros que devem ser calibrados por ensaios específicos descritos pelo Eurocode 4 (European Committee for Standardization, 2004).

Mello *et al.* (2024) realizaram simulações considerando os relevos presentes em *decks* de aço presentes no mercado brasileiro. Foi observado que, quanto maior o coeficiente de atrito, maior a influência da modelagem dos relevos em relação à consideração da chapa lisa.

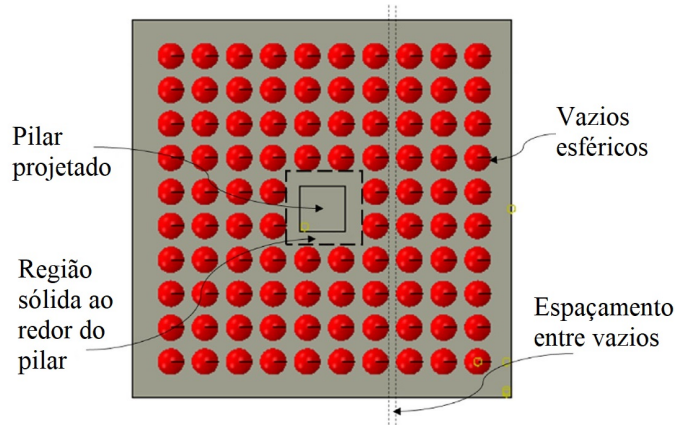
1.2.2 Lajes *bubbledeck*

O princípio de construção das lajes *bubbledeck* é apoiar esferas de plástico ocas (bolhas) nos elementos de reforço (barras de aço), efetivamente reduzindo o uso de concreto no processo de concretagem. Funcionalmente se assemelham muito a lajes nervuradas, com a diferença que os vazios não ficam expostos na parte inferior.

As bolhas tem a função de otimizar o consumo de concreto da laje, reduzindo o peso em até 35% e preservando mais de 90% da capacidade resistiva à flexão em relação a uma laje maciça. Porém a capacidade ao cisalhamento é reduzida consideravelmente (Teja *et al.*, 2012).

Na Figura 8 é mostrado um esquema em planta de uma laje *bubbledeck*, com destaque para a região do pilar, que é desprovida de vazios por conta da concentração de tensões devido à punção.

Figura 8 – Esquema em planta de uma laje *bubbledeck*.



Fonte: adaptado de Al-Gasham, Mhalhal e Jabir (2019).

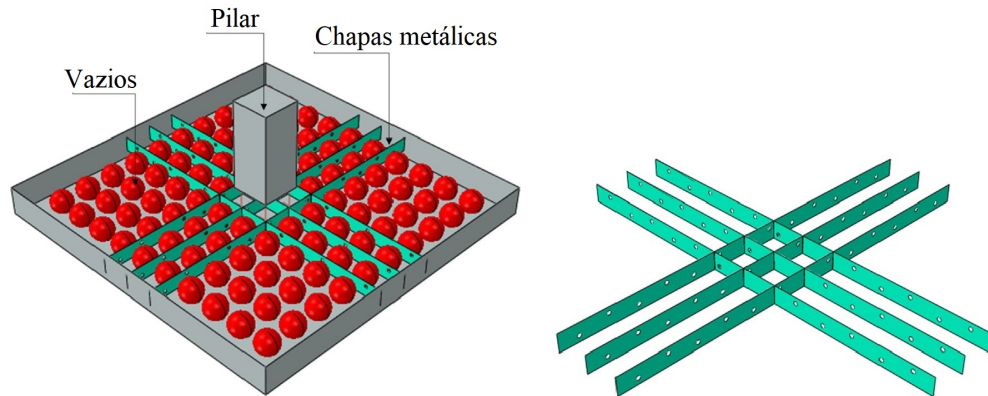
Graças à economia proporcionada, lajes *bubbledeck* e similares são amplamente estudadas na literatura. Por exemplo, Chung *et al.* (2010) ensaiaram estruturas unidirecionais com vazios esféricos e elipsoidais; Ibrahim, Ali e Salman (2013) realizaram estudos paramétricos experimentais em lajes *bubbledeck*, comparando o tamanho e a densidade de distribuição dos vazios esféricos; Chung *et al.* (2018) ensaiaram lajes com vazios em formato de *donut*.

Simulações numéricas foram realizadas por autores como Teja *et al.* (2012), utilizando elementos de casca em que a região das bolhas é simplificada por seções transversais de múltiplas camadas; e Al-Gasham, Mhalhal e Jabir (2019), utilizando modelagem tridimensional e representando os vazios na própria construção da malha.

Em todos os estudos mencionados, foi aferido que lajes com vazios distribuídos têm resistência à flexão similar, por vezes ligeiramente menor, a uma laje maciça, atestando que é seguro e viável aplicá-las em projetos, embora o padrão de ruptura seja em geral menos dúctil e mereça maior atenção. Como esperado, as simulações numéricas permitiram observar maior prominência de tensões de cisalhamento nas lajes com vazios em comparação a lajes maciças de referência.

Para reforçar a resistência ao cisalhamento, Al-Gasham, Mhalhal e Jabir (2019) estudaram introduzir chapas transversais na laje (Figura 9). Além de melhorarem a performance à punção, o padrão de ruptura observado nas lajes reforçadas foi mais dúctil, favorecendo a segurança destas estruturas.

Figura 9 – Chapas transversais de reforço a uma laje *bubbledeck*.



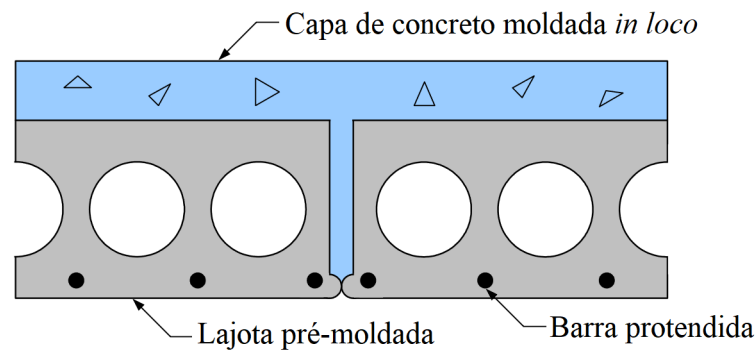
Fonte: adaptado de Al-Gasham, Mhalhal e Jabir (2019).

Não há norma específica para lajes *bubbledeck* no Brasil, sendo recomendado atender as especificações para lajes nervuradas da NBR 6118 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2023) no que diz respeito às dimensões mínimas das regiões íntegras. De acordo com Oukaili e Merie (2023), os códigos normativos ao redor do mundo são, em geral, baseados em leis empíricas e possuem discrepâncias entre si.

1.2.3 Lajes alveolares

Pode ser chamada alveolar qualquer laje que possua vazios longitudinais, mas é comum que se associe o termo às lajes alveolares pré-moldadas de concreto protendido. Estas consistem em elementos pré-moldados vazados reforçados com armadura ativa que, em campo, são posicionados lado a lado e associados por uma camada de concreto moldado *in loco* (Figura 10).

Figura 10 – Seção transversal de uma laje alveolar pré-moldada de concreto protendido.



Fonte: adaptado de Girhammar e Pajari (2008).

As peças pré-moldadas são produzidas por extrusão, o que torna inviável a inclusão de reforços transversais. Preocupações acerca da resistência ao cisalhamento destas lajes

foram levantadas por Lin (1994) e Girhammar e Pajari (2008), que avaliaram os códigos normativos vigentes como insatisfatórios neste respeito.

Na literatura, diversos autores estudaram formas de mitigar esta limitação. Girhammar e Pajari (2008) avaliaram que a capa superior de concreto possui influência significativa direta contra o cisalhamento. Com análises experimentais e analíticas, os autores identificaram um aumento de até 35% na resistência cisalhante da estrutura ao aumentar a espessura da camada superior do concreto e reforçá-la com fibras. Já Cuenca e Serna (2013) propuseram a introdução de fibras no concreto pré-moldado. A viabilidade de fabricação do concreto reforçado e os ganhos na resistência ao cisalhamento foram verificados pelos autores com um extensivo programa experimental.

O dimensionamento de lajes alveolares pré-moldadas de concreto protendido é regido no Brasil por norma específica, a NBR 14861 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2022).

Além desta modalidade específica, lajes alveolares podem consistir em estruturas de concreto moldado *in loco* com algum tipo de material imerso vazado ou pouco resistente, como canos de PVC, de modo a criar vazios longitudinais no lançamento. Em geral, os reforços são constituídos por armadura passiva nestes casos. Gul *et al.* (2020) destacam a aplicabilidade deste tipo de estrutura em obras de baixo orçamento, como em ambientes rurais de países economicamente desfavorecidos.

Diversos autores estudaram esta modalidade de laje alveolar. Wariyatno, Haryanto e Sudibyo (2017) ensaiaram lajes com canos de PVC imersos e observaram um padrão de fissuração de cisalhamento, diferentemente das lajes maciças de referência que romperam à flexão. Kumar *et al.* (2022) realizaram estudos numéricos comparando diversos formatos de seção para alvéolos — retangulares, elípticos, em *donut* e trapezoidais —, e concluíram que o formato elíptico é mais eficiente tanto devido à melhor performance das lajes com vazios deste formato como pela maior facilidade de manufatura. Sahoo *et al.* (2023) estudaram introduzir fibras a lajes alveolares e aferiram, experimentalmente e numericamente, uma melhora na performance aos esforços cisalhantes.

1.3 Justificativa

A importância de simulações computacionais nas Estruturas é justificada, primeiramente, pela praticidade e baixo custo em relação a ensaios experimentais. Embora seja indispensável realizar ensaios para a calibração de modelos numéricos, uma vez que se tenha um modelo suficientemente confiável, muitas análises podem ser realizadas por simulações. Além disso, simulações numéricas permitem analisar o comportamento das estruturas em maiores detalhes, como pelo aferimento de valores da tensão em pontos específicos, por exemplo.

Neste âmbito, o presente trabalho propõe uma alternativa para a simulação numérica de tipos de laje que têm tido crescente aderência na construção civil. A aplicação do MEFP em conjunto com técnicas de imersão e um modelo de dano contínuo regularizado é, até onde vai o conhecimento do autor, inédita para a modelagem de lajes *steeldeck*, *bubbledeck* e alveolares.

A seleção do MEFP em detrimento do MEF posicional é tanto devido à sua simplicidade como à sua abrangência natural à não linearidade geométrica das estruturas. Já a proposição de elementos imersos para a modelagem de chapas metálicas e vazios, embora espere-se que traga algumas limitações, proporciona eficiência computacional graças à redução do número de graus de liberdade e simplificação da malha. É importante que se estude quão vantajoso é aplicar esta técnica. Em todo caso, as técnicas e aplicações realizadas no presente trabalho abrem o caminho para futuros aprimoramentos.

Finalmente, a escolha pela elaboração de um código computacional próprio em detrimento do uso de *softwares* comerciais proporciona maior controle sobre todos os aspectos teóricos e computacionais das simulações realizadas.

1.4 Estrutura do trabalho

No capítulo 2, são descritos em detalhes todos os desenvolvimentos do MEFP necessários para a presente pesquisa. No capítulo 3, é discutida a modelagem da não linearidade física do concreto, com ênfase no modelo de dano contínuo aplicado neste trabalho.

No capítulo 4, a estrutura do código computacional é apresentada, dando destaque às principais nuances do algoritmo.

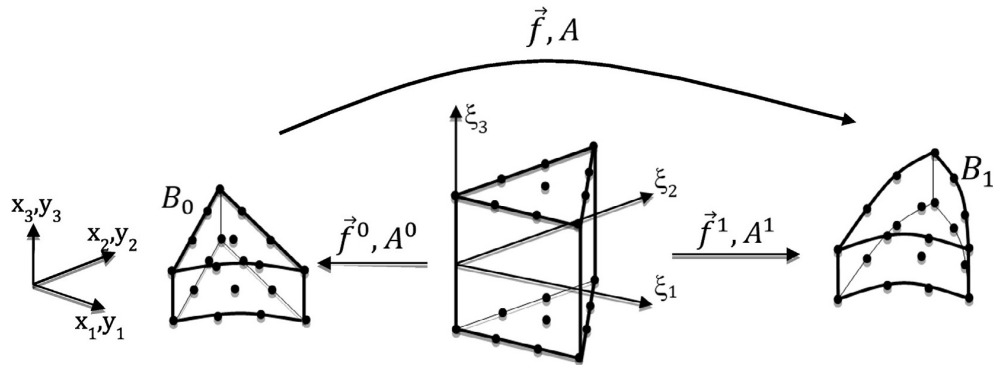
No capítulo 5, são apresentados e discutidos os resultados das simulações realizadas para a validação deste trabalho. Por fim, as conclusões e perspectivas para futuros trabalhos são percorridas no capítulo 6.

2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

Neste capítulo, são apresentados os princípios básicos do MEFPP aplicado a elementos sólidos de maneira direcionada à elaboração de um código computacional. Todo o capítulo é amplamente baseado em Coda (2018). A formulação adotada é em descrição Lagrangiana total, ou seja, baseada na configuração inicial.

O método parte da descrição de um elemento em suas coordenadas iniciais, x_i , e atuais, y_i , sendo o índice i correspondente às direções cartesianas (no espaço tridimensional, $i = 1, 2, 3$). É conveniente pensar também em uma terceira descrição, o espaço adimensional ξ_i . Os três sistemas transitam entre si como representado na Figura 11, na qual é representado um elemento prismático de base triangular.

Figura 11 – Mapeamento de um elemento prismático.



Fonte: Carrazedo *et al.* (2020).

A função \vec{f} é chamada função mudança de configuração, e é responsável por levar o corpo — ou em termos de elementos finitos, o elemento — da sua configuração inicial B_0 à sua configuração final B_1 . As funções \vec{f}^0 e \vec{f}^1 , de maneira análoga, levam o elemento adimensional às configurações inicial e final, respectivamente. É possível descrever a função \vec{f} como uma composição de \vec{f}^1 com a função inversa de \vec{f}^0 :

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1} \quad (2.1)$$

Vale destacar que, como \vec{f}^0 e \vec{f}^1 são funções no domínio adimensional que levam um ponto ao domínio real, estas se confundem com as próprias coordenadas no domínio real, isto é, $f_i^0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = x_i$ e $f_i^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = y_i$.

Além das funções mudança de configuração, são definidos os seus gradientes em relação às coordenadas no sistema adimensional:

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \quad (2.2a)$$

$$A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial y_i}{\partial \xi_j} \quad (2.2b)$$

De forma análoga às funções em si, o gradiente da função \vec{f} , \mathbf{A} , pode ser definido a partir dos gradientes \mathbf{A}^1 e do inverso de \mathbf{A}^0 da seguinte forma:

$$A_{ij} = A_{ik}^1 D_{kj}^0 \quad (2.3)$$

em que $\mathbf{D}^0 = (\mathbf{A}^0)^{-1}$.

Para o estudo de tensões e deformações de um corpo, é indiferente conhecer a forma de \vec{f} , bastando que se conheça a forma de \mathbf{A} , seu gradiente. Embora quaisquer termos constantes que possam existir em \vec{f} sumam nas derivações, tais termos só são capazes de causar deslocamentos de corpo rígido, que não provocam solicitações internas, ou seja, não causam deformações e tensões.

2.1 Funções aproximadoras

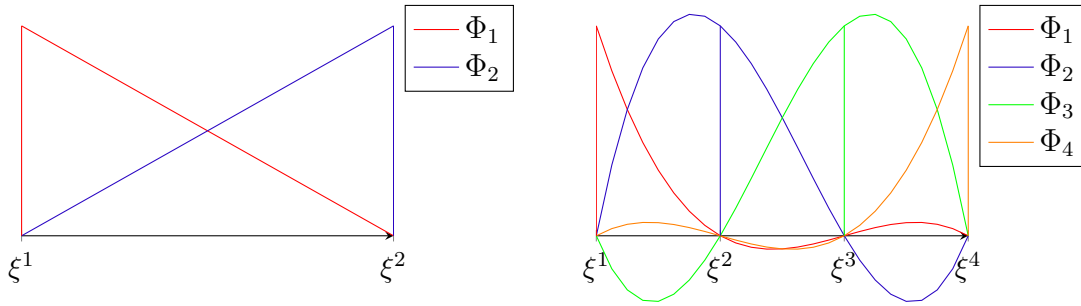
O principal fundamento de um método de elementos finitos é transformar um problema contínuo — como um problema estrutural — em um problema discreto. Assim, abre-se mão de buscar descrever todo o domínio, e se busca conhecer apenas alguns pontos, os “nós”, de modo que restante do domínio é descrito por funções aproximadoras.

Em um domínio unidimensional definido pela coordenada ξ , cujos nós são $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}, \xi^n$ (os índices sobrescritos não indicam potência), a forma mais simples de aproximar o domínio é através dos polinômios de Lagrange (Φ_k), que são definidos por:

$$\Phi_k(\xi) = \prod_{i=1, i \neq k}^n \frac{\xi - \xi^i}{\xi^k - \xi^i}, \quad i \neq k \quad (2.4)$$

Se os polinômios são avaliados nos próprios nós, nota-se facilmente que $\Phi_k(\xi^k) = 1$ e $\Phi_k(\xi^i) = 0$ se $k \neq i$. Além disso, em todo o domínio ocorre a propriedade da partição da unidade, isto é, $\sum_{i=1}^n \Phi_k = 1$. É possível observar estas duas propriedades na Figura 12, em que o comportamento dos polinômios de Lagrange para alguns graus de aproximação é ilustrado. Note que o grau necessário dos polinômios é $n - 1$, ou seja, são necessários pelo menos polinômios lineares para abranger dois nós, cúbicos para quatro nós e assim por diante.

Uma grandeza genérica f com valores nodais F^k conhecidos pode ser aproximada no restante do domínio pela seguinte expressão:

Figura 12 – Polinômios de Lagrange para $n = 2$ e $n = 4$.

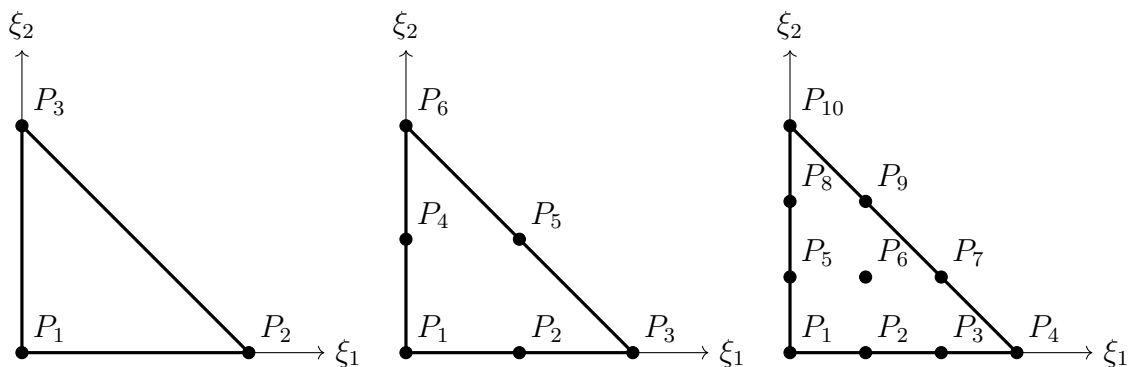
Fonte: o próprio autor.

$$f(\xi) \approx \Phi_k(\xi)F^k \quad (2.5)$$

Confere que os valores da grandeza estão satisfeitos nos nós, e no restante do domínio é feita uma ponderação dos valores nodais de acordo com a sua proximidade do ponto desejado.

Em um domínio de duas dimensões, embora seja possível trabalhar com duas famílias de polinômios de Lagrange para gerar elementos retangulares, elementos triangulares se mostram mais vantajosos por sua melhor adaptação à geometria dos sólidos. Na Figura 13, elementos triangulares de ordem linear, quadrática e cúbica são apresentados. Os elementos estão contidos no domínio $0 \leq \xi_1 \leq 1 - \xi_2$ e $0 \leq \xi_2 \leq 1$ e, para maior praticidade, os nós formam uma malha igualmente espaçada em ambas as direções.

Figura 13 – Elementos triangulares de aproximação linear, quadrática e cúbica.



Fonte: o próprio autor.

As funções aproximadoras destes elementos são polinômios completos (simbolizados por φ_k) cujos coeficientes são de simples obtenção. No caso quadrático, por exemplo, as funções aproximadoras têm a forma:

$$\varphi_k(\xi_1, \xi_2) = c_{k1} + c_{k2}\xi_1 + c_{k3}\xi_2 + c_{k4}\xi_1^2 + c_{k5}\xi_1\xi_2 + c_{k6}\xi_2^2 \quad (2.6)$$

Pela definição de funções aproximadoras, $\varphi_k(P_k) = 1$ e $\varphi_k(P_i) = 0$ se $k \neq i$. Aplicar estas condições na Equação 2.6 resulta no seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,5 & 1 \\ 0 & 0,25 & 1 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,25 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} \quad (2.7)$$

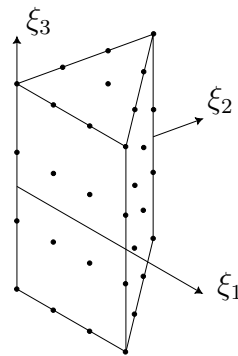
ou $\mathbf{CP} = \mathbf{I}$. Portanto, seja para este caso ou para qualquer ordem de aproximação, a matriz de coeficientes \mathbf{C} dos polinômios aproximadores de uma base triangular pode ser obtida por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1} \quad (2.8)$$

em que \mathbf{P} é uma matriz que depende das coordenadas ξ_1 e ξ_2 dos nós do elemento.

Conhecidas formas de aproximar um domínio bidimensional triangular e um domínio unidimensional, é possível combiná-los para formar um elemento tridimensional na forma de um prisma de base triangular, como o da Figura 14.

Figura 14 – Elemento prismático no domínio adimensional.



Fonte: o próprio autor.

Seja o domínio da base formado pelas coordenadas ξ_1 e ξ_2 e a altura pela coordenada ξ_3 , podem ser obtidas funções de forma para um elemento prismático (simbolizadas por ϕ_k) a partir do produto de polinômios de Lagrange por polinômios de base triangular:

$$\phi_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \varphi_\alpha(\xi_1, \xi_2)\Phi_\beta(\xi_3) \quad (2.9)$$

Na Equação acima, se m é o número de nós da base triangular e n , o número de divisões na altura, $\alpha = 1, \dots, m$ e $\beta = 1, \dots, n$, o que totaliza $m \cdot n$ funções de forma.

A Equação 2.5 também vale para aproximar o valor uma variável genérica em qualquer ponto do domínio de um elemento prismático por valores nodais com o uso das funções ϕ_k . Também é possível partir deste princípio para aproximar a própria geometria do elemento. Sendo assim, as coordenadas iniciais x_i e atuais y_i podem ser expressas em função das coordenadas nodais X_i^k e Y_i^k da seguinte forma:

$$x_i = \phi_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) X_i^k \quad (2.10a)$$

$$y_i = \phi_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) Y_i^k \quad (2.10b)$$

No presente trabalho, todos os elementos desenvolvidos possuirão aproximação cúbica em todas as direções, com exceção dos elementos de treliça, cujo grau de aproximação será linear. Esta escolha é feita pois uma teoria quadrática de deslocamento não consegue descrever adequadamente a distribuição do cisalhamento (Vanalli; Paccola; Coda, 2008).

A matriz de concreto será representada pelo elemento prismático de base triangular da Figura 14, que é constituído por 40 nós.

2.2 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

Do gradiente da função mudança de configuração \mathbf{A} , descrito na Equação 2.3, é possível derivar uma medida de deformação que, diferentemente da deformação linear, é apropriada para corpos moderadamente deformados e sob grandes rotações (isto será detalhado ao fim desta seção): a chamada deformação de Green-Lagrange, \mathbf{L} :

$$L_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ki}A_{kj} - \delta_{ij}) \quad (2.11)$$

em que δ_{ij} é o delta de Kronecker (correspondente à matriz identidade em notação matricial), definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.12)$$

É possível derivar um modelo constitutivo análogo à lei de Hooke para \mathbf{L} . Para tal fim, é introduzido o seu conjugado energético, uma grandeza chamada de tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\mathbf{S}):

$$\frac{\partial u_e}{\partial L_{ij}} = S_{ij} \quad (2.13)$$

em que u_e é a energia específica de deformação, cuja segunda variação resulta no chamado tensor constitutivo elástico tangente (\mathfrak{C} , ou em notação indicial, C_{ijkl}):

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial L_{ij} \partial L_{kl}} = C_{ijkl} \quad (2.14)$$

O modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK) define a energia específica de deformação como:

$$u_e = \frac{1}{2} L_{ij} C_{ijkl} L_{kl} \quad (2.15)$$

Aplicando esta definição na Equação 2.13, chega-se a:

$$S_{ij} = C_{ijkl} L_{kl} \quad (2.16)$$

Embora o tensor \mathfrak{C} tenha 81 componentes no espaço tridimensional, as simetrias do tensor \mathbf{L} e das derivadas da Equação 2.14 reduzem para 21 o número máximo de constantes independentes possíveis em um material anisotrópico geral.

Para os materiais estudados neste trabalho é feita a consideração da isotropia, isto é, o comportamento do material é o mesmo em todas as direções. Esta consideração reduz para 2 o número de constantes constitutivas independentes. Em notação de Voigt, a relação entre deformações e tensões pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} L_{11} \\ L_{22} \\ L_{33} \\ L_{23} \\ L_{13} \\ L_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

em que E e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson do material. É de maior interesse para os desenvolvimentos conhecer as tensões a partir das deformações. Logo, apresenta-se a relação recíproca:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{23} \\ S_{13} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_{11} \\ L_{22} \\ L_{33} \\ L_{23} \\ L_{13} \\ L_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Coda (2018) demonstrou a consistência da medida de deformação de Green-Lagrange para corpos sob rotações de corpo rígido, o que não ocorre com a deformação linear. Porém, destaca é necessário atenção à grandeza das deformações.

Inconsistências para valores elevados de deslocamento podem ser demonstradas facilmente no caso unidimensional, em que tensões são consideradas apenas na direção 11 (esta particularização será desenvolvida em detalhes na seção 2.6.3 para elementos imersos de treliça). Se l_0 e l são os comprimentos inicial e atual de um elemento unidimensional e $\nu = 0$, o modelo constitutivo toma a forma:

$$S_{11} = EL_{11} = \frac{E}{2} \left(\frac{l^2}{l_0^2} - 1 \right) \quad (2.19)$$

Da expressão, é possível aferir que, se $S_{11} = -E/2$, o comprimento atual vai a zero, e ainda, se $S_{11} < -E/2$, o comprimento se torna negativo, ou seja, o material se inverte. Isto demonstra que o modelo de SVK permite a degeneração do material para valores de tensão compressiva finitos e, portanto, sua aplicação deve ser limitada a deformações moderadas.

2.3 Estacionariedade da energia mecânica

Na maior parte dos problemas estruturais, o que se busca é a posição de equilíbrio do corpo. Portanto, parte-se na formulação do princípio da estacionariedade da energia mecânica, que diz que a posição de equilíbrio de uma estrutura ocorre quando a variação do potencial de energia mecânica é nula.

Em um problema estático, a energia mecânica total de uma estrutura pode ser dividida em duas parcelas. A primeira delas é a energia devido às forças externas, sendo admitidas forças de volume, de superfície e, no contexto de elementos finitos, forças concentradas atuando sobre os nós. Em uma malha de elementos finitos, o efeito de forças de volume e de superfície sempre é distribuído para os nós, o que é equivalente a convertê-las em forças nodais. Por esta razão, apenas forças nodais são consideradas diretamente na formulação. Sendo assim, a energia correspondente ao vetor das forças externas \vec{F} aplicadas sobre os graus de liberdade \vec{Y} tem a seguinte forma:

$$\mathbb{P} = -F_i^k Y_i^k = -F_\alpha Y_\alpha \quad (2.20)$$

Por sucintez, sempre que possível, os índices i , da direção, e k , do nó, serão substituídos por um único índice α que engloba todos os graus de liberdade. Em domínios tridimensionais, vale a correspondência $\alpha = 3k + i - 3$.

A segunda parcela da energia mecânica é a energia de deformação, que é a integração no volume da energia específica de deformação (Equação 2.21). Devido à formulação ser em descrição Lagrangeana total, a integração é realizada sobre o volume inicial (V_0).

$$\mathbb{U} = \int_{V_0} u_e dV \quad (2.21)$$

O potencial de energia mecânica total (Π) para o caso estático é, portanto, a soma das duas parcelas:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} \quad (2.22)$$

Pelo princípio da estacionariedade, uma pequena variação arbitrária no potencial de energia mecânica total ($\delta\Pi$) deve valer zero no equilíbrio. Esta variação pode ser ocasionada por uma pequena variação arbitrária da posição atual dos nós (δY_α):

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial Y_\alpha} \delta Y_\alpha = 0 \quad (2.23)$$

Como a variação δY_α é arbitrária e, portanto, pode ser não nula, a derivada do potencial sobre Y_α deve ser nula para que a Equação acima seja satisfeita. Substituindo as Equações 2.20 e 2.21 na derivada, obtém-se:

$$-F_\alpha + \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial Y_\alpha} dV = 0_\alpha \quad (2.24)$$

Para que se possa omitir a variação do termo F_α , é feita a imposição de que as forças externas são invariáveis com a posição atual, sendo denominadas forças conservativas.

Pela regra da cadeia, a derivada de u_e pode ser manipulada explorando a sua dependência pela medida de deformação \mathbf{L} :

$$\frac{\partial u_e}{\partial Y_\alpha} = \frac{\partial u_e}{\partial L_{ij}} \frac{\partial L_{ij}}{\partial Y_\alpha} \quad (2.25)$$

Substituindo na Equação 2.24 e aplicando a Equação 2.13, chega-se a:

$$-F_\alpha + \int_{V_0} S_{ij} \frac{\partial L_{ij}}{\partial Y_\alpha} dV = 0_\alpha \quad (2.26)$$

Com análise dimensional, pode-se aferir que as Equações 2.26 (com índice livre α correspondente a quantos forem os graus de liberdade do problema) se tratam de equilíbrios de forças, sendo comum denominar o termo integral como “forças internas”.

2.4 Método de Newton-Raphson para solução de sistemas não lineares

Do sistema de equações em 2.26, são dados de entrada as forças externas F_α e incógnitas as posições atuais Y_α , que estão contidas nas forças internas. Esta dependência pode ser explorada substituindo as Equações 2.16 e 2.11 no integrando:

$$S_{ij} \frac{\partial L_{ij}}{\partial Y_\alpha} = L_{kl} C_{kl ij} \frac{\partial L_{ij}}{\partial Y_\alpha} = \frac{1}{2} (A_{mk} A_{ml} - \delta_{kl}) C_{kl ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{ni}}{\partial Y_\alpha} A_{nj} + A_{ni} \frac{\partial A_{nj}}{\partial Y_\alpha} \right) \quad (2.27)$$

Aplicando as Equações 2.3, 2.2 e 2.10b, o termo A_{mk} toma a forma:

$$A_{mk} = \frac{\partial y_m}{\partial \xi_o} D_{ok}^0 = Y_m^p \frac{\partial \phi_p}{\partial \xi_o} D_{ok}^0 \quad (2.28)$$

Fica evidente a presença de um termo de \vec{Y} em cada termo das matrizes \mathbf{A} . Como na Equação 2.27 ocorrem os produtos $A_{mk} A_{ml} A_{nj}$ e $A_{mk} A_{ml} A_{ni}$, ocorrem produtos de três termos de \vec{Y} com índices distintos. Demonstra-se assim a não linearidade do sistema de equações e a necessidade de um método adequado para a sua solução.

É selecionado o método iterativo de Newton-Raphson. Este método parte da imposição de uma solução tentativa \vec{Y}^* nas Equações 2.26. Evidentemente, se a posição tentativa não for a posição solução, o sistema não resultará em zero, mas em um vetor \vec{g} , chamado vetor de desbalanceamento:

$$-F_\alpha + \left(\int_{V_0} S_{ij} \frac{\partial L_{ij}}{\partial Y_\alpha} dV \right) \Big|_{Y_\gamma^*} = g_\alpha(Y_\gamma^*) \quad (2.29)$$

Naturalmente, o vetor de desbalanceamento deve valer zero na solução \vec{Y} . O vetor nesta posição é expandido na vizinhança da solução tentativa, resultando em:

$$g_\alpha(Y_\gamma) = g_\alpha(Y_\gamma^*) + \frac{\partial g_\alpha}{\partial Y_\beta} \Big|_{Y_\gamma^*} \Delta Y_\beta + O_\alpha^2(Y_\gamma^*) = 0_\alpha \quad (2.30)$$

em que $\Delta \vec{Y}$, chamado de vetor de correção da posição, é a diferença entre a posição solução e a posição tentativa. Uma resposta aproximada pode ser alcançada se os termos de ordem superior O^2 são desprezados. O método de Newton-Raphson consiste na imposição desta aproximação como uma igualdade, ou seja:

$$g_\alpha(Y_\gamma^*) + \frac{\partial g_\alpha}{\partial Y_\beta} \Big|_{Y_\gamma^*} \Delta Y_\beta = 0_\alpha \quad (2.31)$$

O termo matricial $\partial g_\alpha / \partial Y_\beta$ é comumente chamado de matriz hessiana (\mathbf{H}). Assim, a correção da posição é calculada por:

$$\Delta Y_\beta = -g_\alpha(Y_\gamma^*)H_{\alpha\beta}^{-1}(Y_\gamma^*) \quad (2.32)$$

Encontrado o vetor de correção, a posição tentativa é atualizada:

$$\vec{Y}^* \leftarrow \vec{Y}^* + \Delta \vec{Y} \quad (2.33)$$

Evidentemente, com a omissão dos termos de ordem superior, não há garantia que $\Delta \vec{Y}$ levará \vec{Y}^* à posição solução. Logo, deve ser realizado um processo iterativo entre as Equações 2.32 e 2.33 até que a solução seja satisfatória.

Um critério para inferir que a posição solução está próxima é se a grandeza de $\Delta \vec{Y}$ for muito inferior à grandeza do problema, que pode ser mensurada pela norma do vetor de posições inicial. Em códigos computacionais, geralmente é informada uma tolerância, e o processo iterativo é realizado até que esta seja superior ao valor numérico de $\|\Delta \vec{Y}\|/\|\vec{X}\|$.

2.5 Quadraturas de Gauss-Legendre e Hammer para integrações numéricas

Devido à sua natureza Lagrangiana total, a formulação exige o cálculo de algumas integrais sobre o domínio inicial da estrutura, como no termo das forças internas (Equação 2.29). Uma vez que as funções de forma estão no domínio adimensional ξ_i , o domínio de integração deve ser compatibilizado.

Uma integral de uma função genérica $f(\vec{y})$ sobre o volume inicial do elemento prismático, por exemplo, deve ser reescrita como:

$$\int_{V_0} f(y_i) dV = \int_{-1}^1 \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} f(\xi_i) J_0(\xi_i) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (2.34)$$

em que o jacobiano da transformação (J_0) é simplesmente:

$$J_0 = \det(\mathbf{A}^0) \quad (2.35)$$

Revisitando o detalhamento do integrando do termo da força interna (Equações 2.27 e 2.28), fica evidente que ocorre o produto de diversos termos com a derivada das funções de forma. Realizar a integral de todas as combinações de funções de forma de maneira analítica seria, além de complexo, muito pouco prático. Por este motivo, as integrações são realizadas através de regras de quadratura, que são métodos numéricos que aproximam uma integral definida em um determinado domínio por uma soma de avaliações da função em pontos específicos multiplicada por pesos (Davis; Rabinowitz, 1984).

A quadratura de Gauss-Legendre, por exemplo, vale sobre o domínio unidimensional $[-1; 1]$ e aproxima uma integral de uma função genérica $g(\xi_3)$ da seguinte forma:

$$\int_{-1}^1 g(\xi_3) d\xi \approx \sum_{i=1}^{n_g} g(\xi_3^i) w_g^i \quad (2.36)$$

em que w_g^i são os pesos de Gauss-Legendre e n_g é o número de pontos adotados para a aproximação. A quadratura de Hammer (Hammer; Marlowe; Stroud, 1956) atua de forma similar para domínios bidimensionais triangulares contidos entre os pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, 0)$, de modo que a integral de uma função genérica $h(\xi_1, \xi_2)$ sobre este domínio pode ser aproximada da seguinte forma:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} h(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \approx \sum_{j=1}^{n_h} h(\xi_1^j, \xi_2^j) w_h^j \quad (2.37)$$

em que w_h^j são os pesos de Hammer e n_h é o número de pontos adotados para a aproximação.

Conhecendo essas duas quadraturas, a integral ilustrada na Equação 2.34 pode ser realizada numericamente da seguinte forma:

$$\int_{V_0} f(\xi_i) dV \approx \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_h} f(\xi_1^j, \xi_2^j, \xi_3^i) J_0(\xi_1^j, \xi_2^j, \xi_3^i) w_g^i w_h^j \quad (2.38)$$

A precisão da aproximação da integral está diretamente relacionada à quantidade de pontos e pesos adotada para cada uma das quadraturas. Na quadratura de Gauss-Legendre, a aproximação tem valor exato se a função for um polinômio de grau igual ou inferior a $2n_g - 1$ (Davis; Rabinowitz, 1984). Portanto, $n_g = 2$ é suficiente para aproximar funções de forma cúbicas em ξ_3 . Já na quadratura de Hammer, foi observado que $n_h = 7$ pontos aproximam a integração das funções de forma cúbicas em ξ_1 e ξ_2 de forma satisfatória.

Como mencionado anteriormente, o grau de aproximação cúbico é adotado para todos os elementos bidimensionais e tridimensionais neste trabalho, enquanto os unidimensionais são lineares. Portanto, para todos os casos, $n_g = 2$ e $n_h = 7$ seriam suficientes. No entanto, isto implicaria para os elementos prismáticos de base triangular em haver menos pontos de integração (14) do que nós por elemento (40). No pós-processamento, os valores das tensões são aproximados nos nós a partir dos calculados nos pontos de integração. Para melhor condicionar este processo, adotou-se $n_g = 4$ e $n_h = 12$, de modo que os elementos prismáticos contam com 48 pontos de integração no total.

Nas Tabelas 1 e 2, são dispostos os pontos e pesos referentes aos processos numéricos de integração que foram gerados de acordo com procedimentos das referências (Hammer; Marlowe; Stroud, 1956; Davis; Rabinowitz, 1984) para os números de pontos de integração n_g e n_h adotados.

Tabela 1 – Pontos e pesos de integração de Gauss-Legendre ($n_g = 4$).

i	ξ_3^i	w_g^i
1	-0,339981	0,652145
2	0,339981	0,652145
3	-0,861136	0,347854
4	0,861136	0,347854

Fonte: Davis e Rabinowitz (1984).

Tabela 2 – Pontos e pesos de integração de Hammer ($n_h = 12$).

i	ξ_1^i	ξ_2^i	w_h^i
1	0,501427	0,249287	0,058393
2	0,249287	0,249287	0,058393
3	0,249287	0,501427	0,058393
4	0,873822	0,063089	0,025422
5	0,063089	0,063089	0,025422
6	0,063089	0,873822	0,025422
7	0,053145	0,310352	0,041426
8	0,310352	0,636502	0,041426
9	0,636502	0,053145	0,041426
10	0,310352	0,053145	0,041426
11	0,636502	0,310352	0,041426
12	0,053145	0,636502	0,041426

Fonte: Hammer, Marlowe e Stroud (1956).

2.6 Técnicas de imersão

A imersão consiste em uma técnica de inclusão de elementos no problema sem a adição de novos graus de liberdade. Os elementos que de fato possuem graus de liberdade são chamados de elementos de matriz, que neste trabalho representam o concreto das lajes, modelado por elementos prismáticos de base triangular.

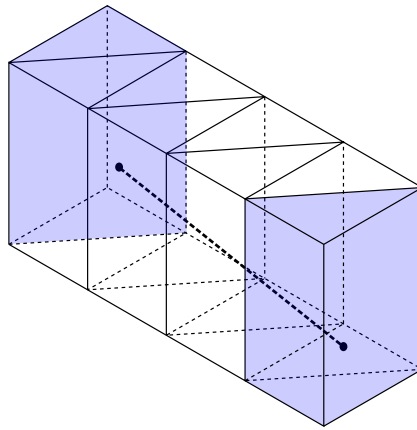
O efeito dos demais elementos através da imersão é efetivado pela inclusão de sua contribuição em elementos de matriz, proporcionando a estes um acréscimo (ou redução) na sua rigidez — ou, efetivamente, na sua contribuição para o vetor de forças e matriz hessiana globais. Além disso, com a consideração da adesão perfeita, os elementos imersos se deslocam em conjunto com os elementos de matriz dos quais fazem parte.

No caso de elementos de inclusão, utilizados por exemplo para representar os *decks* de aço, a consideração da imersão dispensa a necessidade de introduzir estes elementos como graus de liberdade avulsos. Já para exclusões, a imersão permite a simplificação da malha da matriz, pois esta não precisa se acomodar à geometria dos vazios.

2.6.1 Incidência de nós imersos independentes

Os elementos imersos podem ter nós coincidentes com nós de matriz, como é o caso dos elementos de face ativa, mas nos demais casos seus nós são independentes. É o caso, por exemplo, do elemento de fibra imerso ilustrado na Figura 15, em que cada um dos nós independentes está imerso em um dos elementos destacados.

Figura 15 – Elemento de fibra imerso em elementos de matriz.



Fonte: o próprio autor.

Ressalta-se que a fibra possui baixa discretização na figura para demonstrar que os nós são responsáveis pela distribuição da rigidez. Em problemas reais, busca-se que existam nós em todos ou, pelo menos, na maioria dos elementos em que o elemento imerso está presente, o que é alcançado por uma melhor discretização da fibra.

A ocorrência de nós independentes exige que se identifique a qual elemento de matriz cada nó imerso pertence através de um algoritmo que é detalhado a seguir.

O primeiro passo, eliminatório, é verificar se o nó está envolto em uma região esférica que contém o elemento de matriz em verificação. O centro desta esfera, cujas coordenadas são X_i^C , é calculado pela média das coordenadas das arestas do prisma, e o seu raio r é a distância do centro à aresta mais distante. Adota-se ainda uma tolerância de 5%. Assim, o nó independente, cujas coordenadas são \bar{X}_i , é dito possivelmente imerso no elemento de matriz se:

$$\sum_{i=1}^3 (X_i^C - \bar{X}_i)^2 < (1,05r)^2 \quad (2.39)$$

O segundo passo é encontrar o valor das coordenadas adimensionais do nó independente, denominadas $\bar{\xi}_i$, no sistema adimensional do elemento de matriz candidato. O nó é dito imerso no elemento se suas coordenadas pertencerem ao domínio do prisma, isto é, $0 \leq \bar{\xi}_1 \leq 1 - \bar{\xi}_2$, $0 \leq \bar{\xi}_2 \leq 1$ e $-1 \leq \bar{\xi}_3 \leq 1$. Caso contrário, outro elemento de matriz deve ser investigado.

Recupera-se a Equação 2.10a para aproximar as coordenadas do nó da fibra no sistema inicial, \bar{X}_i , em função das coordenadas do elemento prismático, X_i^k :

$$\bar{X}_i = \phi_k(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3) X_i^k \quad (2.40)$$

ou, matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1^1 & X_1^2 & \dots & X_1^{n-1} & X_1^n \\ X_2^1 & X_2^2 & \dots & X_2^{n-1} & X_2^n \\ X_3^1 & X_3^2 & \dots & X_3^{n-1} & X_3^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3) \\ \phi_2(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3) \\ \vdots \\ \phi_{n-1}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3) \\ \phi_n(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.41)$$

ou $\vec{\bar{X}} - \mathbf{X}\vec{\phi}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3) = \vec{0}$, um sistema de equações cujas incógnitas são $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ e $\bar{\xi}_3$. Devido à presença de termos não lineares nas funções de forma em $\bar{\xi}_i$, faz-se necessário um método de solução para sistemas de equações não lineares.

É adotado o método de Newton-Raphson, discutido na seção 2.4. Realizando desenvolvimentos análogos, o sistema a ser iterado tem a forma $\Delta\vec{\xi} = -\vec{g}(\vec{\xi}^*)\mathbf{H}^{-1}(\vec{\xi}^*)$, em que $\vec{\xi}^*$ é o vetor de solução tentativa e $\Delta\vec{\xi}$ é o vetor de correção da solução. O ponto de partida da solução tentativa é $\vec{\xi}^* = (0,5; 0,5; 0)$, o centro do prisma. \mathbf{H} e \vec{g} são explicitamente:

$$H_{ij} = \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_j} X_i^k \quad (2.42a)$$

$$g_i = \bar{X}_i - \phi_k X_i^k \quad (2.42b)$$

O critério de aceitação da solução de sistema é que a tolerância seja superior ao valor de $\|\Delta\vec{\xi}\|/\|\vec{\xi}\|$, em que $\vec{\xi}$ contém as coordenadas nodais adimensionais do elemento. Para este processo iterativo, neste trabalho adotou-se uma tolerância fixa de 10^{-6} .

2.6.2 Contribuição de elementos imersos com nós independentes

Assim como os elementos de matriz, os elementos imersos também possuem uma energia de deformação associada, denominada \bar{U} . A contribuição destes elementos sobre um elemento de matriz se dá pela adição desta parcela no seu potencial de energia mecânica

total. Disto e do princípio da estacionariedade da energia mecânica (Equação 2.26), decorre o seguinte equilíbrio de forças:

$$-F_i^k + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_i^k} + \frac{\partial \bar{\mathbb{U}}}{\partial Y_i^k} = 0_i^k \quad (2.43)$$

A parcela da energia de deformação do elemento de matriz ($\partial \mathbb{U}/\partial \vec{Y}$) já foi descrita de forma explícita na Equação 2.26 e não será desenvolvida aqui. Na parcela associada ao elemento imerso, considera-se a contribuição de um único nó de uma imersão com coordenadas \vec{Y} . Com a regra da cadeia, a relação entre o nó imerso e os nós do elemento de matriz é explorada da seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{\mathbb{U}}}{\partial Y_i^k} = \frac{\partial \bar{\mathbb{U}}}{\partial \bar{Y}_j} \frac{\partial \bar{Y}_j}{\partial Y_i^k} \quad (2.44)$$

A derivada $\partial \bar{\mathbb{U}}/\partial \vec{Y}$ corresponde à parcela de forças internas do nó imerso. Para o outro termo derivado, é necessário expressar \vec{Y} em termos de \bar{Y} , o que pode ser feito pela Equação 2.40:

$$\bar{Y}_j = \phi_l Y_j^l \quad (2.45)$$

Com isto, e realizando algumas operações indiciais, $\partial \bar{\mathbb{U}}/\partial \vec{Y}$ resulta em:

$$\frac{\partial \bar{Y}_j}{\partial Y_i^k} = \phi_l \frac{\partial Y_j^l}{\partial Y_i^k} = \phi_l \delta_{ji} \delta_{lk} = \phi_k \delta_{ji} \quad (2.46)$$

Portanto, o vetor de desbalanceamento \vec{g} de um elemento, que se iguala ao equilíbrio de forças da Equação 2.43, tem a seguinte forma completa:

$$g_i^k = -F_i^k + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_i^k} + \frac{\partial \bar{\mathbb{U}}}{\partial \bar{Y}_i} \phi_k \quad (2.47)$$

Seguindo o mesmo princípio, a matriz hessiana de um elemento com imersões, correspondente a $\partial \vec{g}/\partial \vec{Y}$, toma a forma:

$$H_{il}^{kn} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_i^k \partial Y_l^n} + \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_i} \left(\frac{\partial \bar{\mathbb{U}}}{\partial Y_l^n} \right) \phi_k \quad (2.48)$$

Aplicando, novamente, a regra da cadeia sobre o termo $\partial \bar{\mathbb{U}}/\partial \vec{Y}$, tem-se:

$$\frac{\partial \bar{\mathbb{U}}}{\partial Y_l^n} = \frac{\partial \bar{\mathbb{U}}}{\partial \bar{Y}_m} \frac{\partial \bar{Y}_m}{\partial Y_l^n} \quad (2.49)$$

Segue que $\partial\bar{Y}/\partial\bar{Y}$ vale:

$$\frac{\partial\bar{Y}_m}{\partial Y_l^n} = \phi_n \delta_{ml} \quad (2.50)$$

Efetuando as substituições, a hessiana do elemento tem a forma completa:

$$H_{il}^{kn} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_i^k \partial Y_l^n} + \frac{\partial^2 \bar{\mathbb{U}}}{\partial \bar{Y}_i \partial \bar{Y}_l} \phi_k \phi_n \quad (2.51)$$

em que $\partial^2 \mathbb{U}/\partial \bar{Y}^2$ corresponde à hessiana do elemento de matriz, e $\partial^2 \bar{\mathbb{U}}/\partial \bar{Y}^2$, à contribuição da hessiana do nó imerso.

Para elementos sobre os quais incidem múltiplos nós imersos, basta adicionar às Equações 2.47 e 2.51 quantas parcelas $\partial\bar{\mathbb{U}}/\partial\bar{Y}$ e $\partial^2\bar{\mathbb{U}}/\partial\bar{Y}^2$, respectivamente, forem necessárias.

Note que as forças internas e a matriz hessiana dos nós imersos decorrem do cálculo dos elementos imersos como um todo, embora sua contribuição seja expressa nó a nó nesta seção.

2.6.3 Elementos imersos de treliça

Elementos de treliça podem ser compreendidos como uma particularização de elementos tridimensionais em que apenas a direção 11 está sujeita a tensões. Se o efeito de Poisson é desprezado, deformações também atuam exclusivamente na direção 11. Aplicando estas condições na Equação 2.17, decorre que o modelo constitutivo é resumido a:

$$S_{11} = EL_{11} \quad (2.52)$$

em que E é o módulo de elasticidade do material.

Assim sendo, para esta formulação é possível se desprender dos índices direcionais, bastando denominar $S_{11} = S$ e $L_{11} = L$. Também é suficiente trabalhar em um domínio adimensional unidimensional, sendo adotado $-1 \leq \xi \leq 1$.

Inicialmente, admite-se que os domínios inicial e atual também são descritos em sistemas unidimensionais, respectivamente, pelas variáveis x e y . Particularizando as Equações 2.11, 2.3 e 2.2 para este caso, a deformação de Green-Lagrange toma a seguinte forma:

$$L = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 - 1 \right] \quad (2.53)$$

Em um elemento unidimensional de grau linear, isto é, descrito por apenas dois nós, a função $(f^0)^{-1} = \xi(x)$ é de simples descrição a partir das coordenadas iniciais dos nós X^1 e X^2 , ou ainda, a partir de X^1 e $l_0 = X^2 - X^1$. O mesmo se aplica para $f^1 = y(\xi)$, facilmente descrita pelas coordenadas atuais Y^1 e Y^2 , ou ainda, Y^1 e $l = Y^2 - Y^1$. Essas funções têm a forma:

$$\xi(x) = \frac{2}{l_0}(x - X^1) - 1 \quad (2.54a)$$

$$y(\xi) = \frac{l}{2}(\xi + 1) + Y^1 \quad (2.54b)$$

de modo que as derivadas da Equação 2.53 podem ser efetuadas, resultando em:

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{l_0^2} - 1 \right) \quad (2.55)$$

Embora o artifício das coordenadas unidirecionais x e y permita que se derive facilmente a deformação de Green-Lagrange uniaxial, os elementos de treliça são incluídos em um domínio tridimensional. Por esta razão, são consideradas três dimensões espaciais deste ponto em diante.

Em três dimensões, os quadrados dos comprimentos valem:

$$l_0^2 = (X_1^2 - X_1^1)^2 + (X_2^2 - X_2^1)^2 + (X_3^2 - X_3^1)^2 \quad (2.56a)$$

$$l^2 = (Y_1^2 - Y_1^1)^2 + (Y_2^2 - Y_2^1)^2 + (Y_3^2 - Y_3^1)^2 \quad (2.56b)$$

Na sequência, o equilíbrio de forças que derivou do princípio da estacionariedade da energia mecânica (Equação 2.26) é particularizado. Admite-se que a energia específica de deformação é constante em um elemento de treliça e, portanto, a integral sobre o volume V_0 pode ser efetuada desconsiderando qualquer dependência dos entes do integrando, de modo que o termo da energia interna resulta em:

$$\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_i^k} = S \frac{\partial L}{\partial Y_i^k} A_0 l_0 \quad (2.57)$$

em que A_0 é a área da seção transversal do elemento na configuração inicial. Note que, com a desconsideração do efeito de Poisson, a área não varia.

Substituindo a Equação 2.56b em 2.55 e aplicando-a em 2.57, a derivada pode ser efetuada analiticamente. Assim, a particularização da Equação 2.26, considerando que forças externas não incidem diretamente sobre imersões, toma a seguinte forma:

$$\frac{A_0 S}{l_0} d_\alpha = 0_\alpha \quad (2.58)$$

em que \vec{d} é expresso matricialmente por:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} -(Y_1^2 - Y_1^1) \\ -(Y_2^2 - Y_2^1) \\ -(Y_3^2 - Y_3^1) \\ Y_1^2 - Y_1^1 \\ Y_2^2 - Y_2^1 \\ Y_3^2 - Y_3^1 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Ao considerar a imersão dos elementos de treliça na matriz tridimensional, o sistema de equações em 2.58 corresponde à parcela $\partial^2 \bar{U} / \partial \vec{Y}^2$ na Equação 2.43, isto é:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial Y_\alpha} = \frac{A_0 S}{l_0} d_\alpha \quad (2.60)$$

Por sua vez, o termo $\partial^2 \bar{U} / \partial \vec{Y}^2$, associado à matriz hessiana, tem a forma:

$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial Y_\alpha \partial Y_\beta} = \frac{A_0}{l_0} \frac{\partial S}{\partial Y_\beta} d_\alpha + \frac{A_0 S}{l_0} \frac{\partial d_\alpha}{\partial Y_\beta} \quad (2.61)$$

A Equação 2.61 é desenvolvida para maior clareza de seus entes. O termo $\partial S / \partial \vec{Y}$ pode ser manipulado com a regra da cadeia da seguinte forma:

$$\frac{\partial S}{\partial Y_\beta} = \frac{\partial S}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial Y_\beta} \quad (2.62)$$

Substituindo a Equação 2.52 em S , nota-se que $\partial S / \partial L$ é simplesmente E . Também decorre do desenvolvimento entre as Equações 2.57 e 2.58 que $\partial L / \partial \vec{Y} = \vec{d} / l_0^2$.

Já o termo $\partial \vec{d} / \partial \vec{Y}$ corresponde a uma matriz, aqui denominada Δ , cuja forma expandida é:

$$\frac{\partial \vec{d}}{\partial \vec{Y}} = \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Em conclusão, a Equação 2.61 pode ser reescrita da seguinte forma:

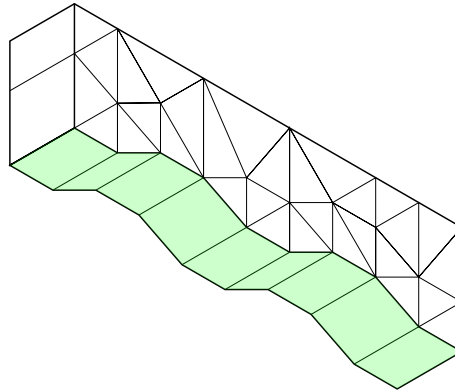
$$\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial Y_\alpha \partial Y_\beta} = \frac{A_0}{l_0} \left(\frac{E}{l_0^2} d_\alpha d_\beta + S \Delta_{\alpha\beta} \right) \quad (2.64)$$

2.6.4 Elementos imersos de face ativa

Um elemento de face ativa (Carrazedo; Paccola; Coda, 2018) é definido a partir de uma das faces de um elemento prismático existente. Neste caso, a verificação da incidência dos nós, detalhada na seção 2.6.1, é dispensada, pois esta já é um dado de entrada.

Trata-se de um elemento plano que garante resistência adicional aos elementos de matriz. Sua aplicação neste trabalho é representar o *deck* de aço das lajes *steeldeck*. Na Figura 16, é ilustrada uma malha representativa desta aplicação. Os elementos prismáticos representam a matriz de concreto, e as faces destacadas na região inferior são os elementos de face ativa, que garantem à matriz o acréscimo de rigidez correspondente ao *deck* de aço.

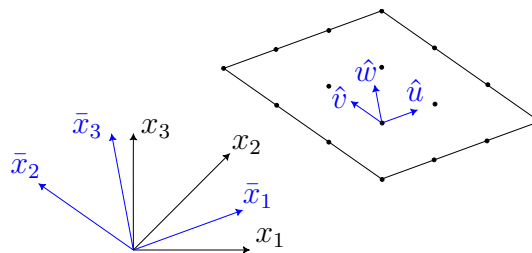
Figura 16 – Malha com elementos de face ativa.



Fonte: o próprio autor.

As faces ativas são elementos retangulares planos e, portanto, podem ser calculadas em apenas duas dimensões. Para isto, é necessário que se defina um sistema de coordenadas local, em que \bar{x}_1 e \bar{x}_2 são direções contidas no plano da face e \bar{x}_3 é normal à face. No sistema adimensional, os versores \hat{u} , \hat{v} e \hat{w} descrevem, respectivamente, duas direções dentro do plano e uma normal ao plano (Figura 17).

Figura 17 – Elemento retangular nos sistemas global e local.



Fonte: o próprio autor.

Admite-se que a dimensão do elemento na direção \bar{x}_3 , ou espessura, é constante. Considera-se, ainda, um estado plano de deformações (ou seja, $\bar{L}_{13} = \bar{L}_{23} = \bar{L}_{33} = 0$) e,

desprezando o efeito de Poisson na direção da espessura ($\bar{\nu}_{13} = \bar{\nu}_{23} = \bar{\nu}_{31} = \bar{\nu}_{32} = 0$), também não ocorrem tensões na direção normal ao plano.

A geometria do elemento retangular pode ser aproximada pelo produto de um par de conjuntos de polinômios de Lagrange, um para cada direção, com graus compatíveis ao número de nós em cada direção da face. São adotados 4 nós por direção, totalizando 16 nós por elemento plano, requerendo polinômios de Lagrange cúbicos para a aproximação.

Como a espessura do elemento é constante, as integrações no volume que derivam do princípio da estacionariedade da energia mecânica se reduzem a integrações na área a serem resolvidas numericamente por um par de quadraturas de Gauss-Legendre.

Para efetuar o cálculo do elemento, é necessário que as coordenadas dos nós sejam primeiro rotacionadas para o sistema local da seguinte forma:

$$\bar{x}_i = R_{ij}x_j \quad (2.65a)$$

$$\bar{y}_i = R_{ij}y_j \quad (2.65b)$$

em que \mathbf{R} é a matriz de rotação que transita do sistema global para o sistema local da face, descrita em função dos vetores adimensionais do elemento retangular da seguinte forma:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 \\ \hat{w}_1 & \hat{w}_2 & \hat{w}_3 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Daí, o cálculo do vetor de forças internas $\partial\bar{\mathbf{U}}/\partial\bar{\mathbf{Y}}$ e da matriz hessiana $\bar{\mathbf{H}}$ do elemento retangular seguem de maneira análoga aos elementos prismáticos, mas neste caso, é possível e conveniente reduzir o problema para duas dimensões e, ao final, preencher os valores relativos à terceira direção com zeros.

Por fim, deve-se rotacionar as grandezas de volta para o sistema original para que estas contribuam no vetor de desbalanceamento \vec{g} e na matriz hessiana \mathbf{H} do elemento de matriz ao qual a face pertence. As expressões completas dos entes locais de um elemento reforçado com faces ativas têm a seguinte forma:

$$g_\alpha = -F_i^k + \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial Y_\alpha} + R_{\gamma\alpha}\bar{F}_\gamma \quad (2.67a)$$

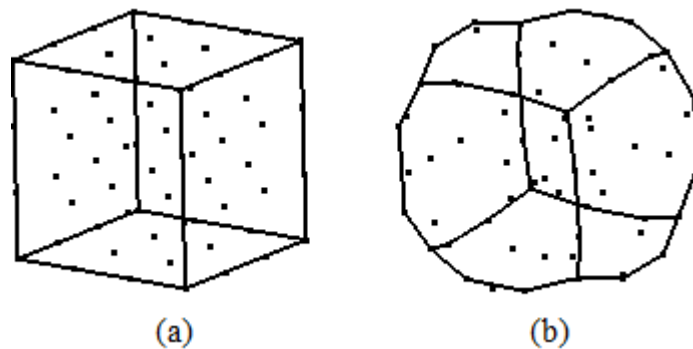
$$H_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial Y_\alpha\partial Y_\beta} + R_{\gamma\alpha}\bar{H}_{\gamma\delta}R_{\delta\beta} \quad (2.67b)$$

2.6.5 Elementos imersos tridimensionais vazios

Os vazios das lajes *bubbledeck* e alveolar são representadas por elementos imersos tridimensionais. O princípio de cálculo destes elementos é similar ao dos elementos de matriz, e a técnica de imersão é a descrita na seção 2.6.2, visto que aqui os nós são independentes.

Para cada vazio esférico das lajes *bubbledeck*, é adotado um elemento hexaédrico (em forma de cubo). Seu grau é cúbico em todas as direções, totalizando 64 nós por elemento (Figura 18a). Os nós são posicionados de modo que o elemento tenha o formato aproximadamente esférico. Isto é feito fazendo todos os nós externos do hexaedro distantes r do centro e os nós internos a $r/3$, respeitando a razão entre as distâncias dos nós centrais e a das arestas ao centro no sólido original (Figura 18b).

Figura 18 – Elemento hexaédrico em seus formatos (a) adimensional e (b) esférico.



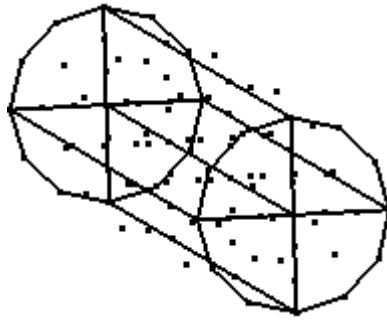
Fonte: o próprio autor.

Já para os vazios alveolares, o elemento prismático de base triangular, de grau cúbico na base e na altura, é utilizado. O nós são posicionados de modo que a base tenha o formato aproximado de um quarto de círculo. Para este fim, os nós de uma das faces do triângulo são posicionados distantes r do nó de origem, e o nó central é levado à coordenada $(4r/3\pi; 4r/3\pi)$, o centro geométrico da figura. Quatro elementos deste tipo são posicionados adjacentes entre si para formar um vazio cilíndrico (Figura 19).

Tratando-se de uma exclusão, as propriedades materiais da imersão devem anular as da matriz. Para isto, se a exclusão pertence a elementos de propriedades E e ν , faz-se $\bar{E} = -E$ e $\bar{\nu} = \nu$.

O procedimento para o cálculo do vetor de forças internas $\partial\bar{U}/\partial\vec{Y}$ e da matriz hessiana \bar{H} destes elementos é o mesmo que o feito para os elementos de matriz. No caso dos elementos hexaédricos, o domínio é aproximado por três grupos de polinômios de Lagrange, um para cada direção, e as integrações são realizadas numericamente por uma tripla quadratura de Gauss-Legendre.

Figura 19 – Elementos prismáticos adjacentes aproximados para formato cilíndrico.



Fonte: o próprio autor.

Já a contribuição na matriz dos elementos de vazio segue o que foi descrito na seção 2.6.2, devendo-se seguir as Equações 2.47 e 2.51.

3 MODELO DE DANO

Em simulações do concreto, é adequado considerá-lo homogêneo e isotrópico apenas até o surgimento das fissuras, ponto em que sua curva tensão \times deformação passa a evoluir não linearmente. Em elementos finitos, a modelagem desta não linearidade pode ser feita de maneira discreta ou contínua. O método discreto consiste na introdução das fissuras como descontinuidades da malha. A mecânica da fratura estuda o surgimento e a propagação de fissuras e tem diversas aplicações no estudo da modelagem de materiais, inclusive o concreto (Landkof; Goldsmith, 1985; Cirak; Ortiz; Pandolfi, 2005; Zhang *et al.*, 2021).

Já o método contínuo preserva a integridade da malha, representando a fratura por um processo de acumulação de dano em nós da malha que atingem um determinado grau de deformação. Esta abordagem é mais simples e menos computacionalmente custosa (Kattan; Voyiadjis, 1990; Silva, 2023).

3.1 Modelo de dano contínuo de Mazars

Mazars (1984) propôs um modelo contínuo de danificação que é difundido até hoje graças à sua simplicidade, efetividade e à consistência termodinâmica da formulação. Neste modelo, o dano é mensurado por uma variável escalar D , sempre crescente, que varia de 0 (material íntegro) a 1 (material completamente danificado).

Em sua proposição original, a variável de dano foi pensada como o grau de degeneração da seção transversal em um caso unidimensional. Murakami (1988) expandiu este modelo para três dimensões, mas preservou a descrição do dano por uma variável escalar.

O modelo de dano contínuo vem sendo aplicado extensivamente para o concreto, tanto em pesquisas como em *softwares* comerciais. Alvares (1993), por exemplo, aplicou este modelo de dano a vigas de concreto, realizando a calibração dos parâmetros e validando sua modelagem em elementos finitos com ensaios experimentais.

O modelo de dano contínuo parte das seguintes hipóteses:

- o comportamento do material é elástico durante o processo de danificação, isto é, não ocorrem deformações permanentes;
- o dano ocorre por alongamento, ou seja, só surge em um ponto se houver ao menos uma componente de tração sobre este ponto;
- o dano é isotrópico, descrito em cada ponto por uma grandeza escalar D , $0 \leq D < 1$.

Quando o material também é isotrópico, a danificação pode ser introduzida como uma penalização direta no módulo de elasticidade longitudinal. Seja E a propriedade íntegra do material e \tilde{E} a danificada, tem-se:

$$\tilde{E} = (1 - D)E \quad (3.1)$$

Para verificar se a danificação deve ocorrer em determinado ponto, é necessário definir uma grandeza que mensure a quantidade de tração que ocorre sobre o mesmo. Para tal fim, é introduzido o escalar \tilde{L} , ou deformação tratativa equivalente, definido por:

$$\tilde{L} = \sqrt{(L_1^+)^2 + (L_2^+)^2 + (L_3^+)^2} \quad (3.2)$$

em que L_i^+ são as deformações principais do ponto, mas apenas as positivas, isto é:

$$L_i^+ = \begin{cases} L_i & \text{se } L_i > 0 \\ 0 & \text{se } L_i \leq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

A danificação no ponto só se inicia quando \tilde{L} atinge o valor de L_{d0} , a deformação de danificação inicial, que na situação íntegra da estrutura é característica do material. Após o início da danificação, L_{d0} passa a guardar o maior valor de \tilde{L} já atingido naquele ponto.

De acordo com Félix (2022), na impossibilidade de determinar o valor inicial de L_{d0} , pode-se admiti-la igual à deformação que ocorre quando o concreto atinge o limite inferior da sua resistência à tração ($f_{ctk,inf}$) em uma condição de carregamento uniaxial. Deste modo, aplicando a lei de Hooke, pode-se adotar a seguinte estimativa:

$$L_{d0} = \frac{f_{ctk,inf}}{E_{ci}} \quad (3.4)$$

De acordo com definição da NBR 6118 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2023), $f_{ctk,inf}$ vale 70% da resistência média à tração f_{ctm} . Na ausência de ensaios para determinar esta resistência diretamente, o Model Code (International Federation for Structural Concrete, 2010) e a NBR 6118 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2023) sugerem, para concretos de classe igual ou inferior a C50, uma estimativa baseada no f_{ck} , que é a resistência à compressão característica do concreto:

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot (f_{ck})^{2/3} \quad (3.5)$$

com f_{ck} e f_{ctm} dados em MPa.

Já E_{ci} é o módulo de elasticidade inicial do concreto que, de acordo com a NBR 6118 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2023), quando não determinado por ensaios, pode ser estimado pela seguinte expressão:

$$E_{ci} = \alpha_E \cdot 5.600 \sqrt{f_{ck}} \quad (3.6)$$

com f_{ck} e E_{ci} dados em MPa. Na equação, α_E é um fator que depende da composição do agregado graúdo no concreto. Na maior parte dos casos, admite-se $\alpha_E = 1,0$.

É importante ressaltar que, na maioria das menções ao modelo de dano contínuo na literatura, bem como na proposição original, utiliza-se a deformação linear ε e, portanto, são tratadas grandezas como ε_{d0} e $\tilde{\varepsilon}$ ao invés de L_{d0} e \tilde{L} . Para os valores de deformação com que se lidou neste trabalho, a diferença entre as duas grandezas é suficientemente pequena. Assim, por simplicidade, optou-se por substituir diretamente todas as medidas de deformação linear por medidas de deformação de Green-Lagrange.

Uma vez determinado que houve danificação, ou seja, $\tilde{L} \geq L_{d0}$, o dano D é calculado pela seguinte expressão:

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (3.7)$$

em que α_T e α_C são fatores que ponderam o quanto de tração e de compressão, respectivamente, está ocorrendo no ponto, sendo dados por:

$$\alpha_T = \frac{\sum_{i=1}^3 L_i^+}{\sum_{i=1}^3 L_i^+ + \sum_{i=1}^3 L_i^-} \quad (3.8a)$$

$$\alpha_C = \frac{\sum_{i=1}^3 L_i^-}{\sum_{i=1}^3 L_i^+ + \sum_{i=1}^3 L_i^-} \quad (3.8b)$$

em que L_i^- são, analogamente a L_i^+ , as deformações principais do ponto, mas apenas quando negativas:

$$L_i^- = \begin{cases} 0 & \text{se } L_i \geq 0 \\ L_i & \text{se } L_i < 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Já as grandezas D_T e D_C são as parcelas de danificação trativa e compressiva, respectivamente, sendo calculadas por:

$$D_T = 1 - \frac{L_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{L}} - \frac{A_T}{e^{B_T(\tilde{L} - L_{d0})}} \quad (3.10a)$$

$$D_C = 1 - \frac{L_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{L}} - \frac{A_C}{e^{B_C(\tilde{L} - L_{d0})}} \quad (3.10b)$$

Nestas equações, A_T , B_T , A_C e B_C são parâmetros empíricos que devem ser calibrados com ensaios específicos. Mazars (1984) sugere que os parâmetros estejam dentro dos intervalos apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Intervalos dos parâmetros do modelo de dano.

	Mínimo	Máximo
A_T	0,7	1,0
B_T	10.000	100.000
A_C	1,0	1,5
B_T	1.000	2.000

Fonte: Mazars (1984).

Como as validações deste trabalho envolvem modelar numericamente experimentos previamente realizados na literatura, a obtenção destes parâmetros é pouco viável, pois calibrá-los sem nenhum respaldo experimental proporcionaria um elevado grau de incertezas.

3.2 Adaptação do modelo de dano contínuo

Com o objetivo de substituir valores empíricos por grandezas com significado físico, bem como mitigar o fenômeno de dependência da malha observado por diversos autores na proposição original, Arruda *et al.* (2022) propuseram uma modificação na teoria de Mazars (1984) que preserva a consistência termodinâmica da proposição original enquanto reformula o cálculo das quantidades D_T e D_C . Além disso, esta adaptação elimina a dependência da malha observada no modelo original.

Para o comportamento trativo, que corresponde a D_T , presume-se que a curva tensão \times deformação é linear até o patamar $\tilde{L} = L_{d0}$, ponto em que a tensão começa a decrescer. Para representá-la, os autores se baseiam na lei bilinear proposta pelo Model Code (International Federation for Structural Concrete, 2010), mas introduzem uma suavização exponencial no trecho decrescente:

$$D_T = 1 - \frac{L_{d0}}{0,9\tilde{L}} \exp \left[(L_{d0} - \tilde{L}) \frac{l_c f_{ctm}}{G_f} \right] \quad (3.11)$$

Nesta equação, l_c é o comprimento característico do elemento. Seja V_0 o volume inicial do elemento e n o número de pontos de integração numérica, Silva (2023) descreve esta grandeza para elementos prismáticos de base triangular da seguinte forma:

$$l_c = \sqrt[3]{\frac{V_0}{n}} \quad (3.12)$$

Já G_f é a energia de fratura do material, medida em unidade de força por comprimento, que representa a energia necessária para propagar uma fissura de área unitária. Na ausência de ensaios específicos para determiná-la, o Model Code (International Federation for Structural Concrete, 2010) sugere a seguinte estimativa:

$$G_f = 73 \cdot (f_{cm})^{0,18} \quad (3.13)$$

em que G_f é dado em N/m e f_{cm} , a resistência à compressão média do concreto, é dada em MPa. Para esta última, o Model Code (International Federation for Structural Concrete, 2010) orienta a seguinte consideração:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ MPa} \quad (3.14)$$

Já para o cálculo de D_C , que corresponde à danificação compressiva, primeiramente define-se a deformação compressiva equivalente \tilde{L}_c pela seguinte expressão:

$$\tilde{L}_c = \frac{\tilde{L}}{\nu\sqrt{2}} \leq L_{cu} \quad (3.15)$$

em que L_{cu} é a deformação última de compressão. Ressalta-se que \tilde{L}_c , L_{cu} , bem como as deformações intermediárias L_{c1} e L_{c2} , embora deformações compressivas, assumem valores positivos para efeito das expressões matemáticas aqui apresentadas.

Na compressão, o comportamento da curva tensão \times deformação proposto por Arruda *et al.* (2022) é delimitado pelas deformações características L_{c1} , L_{c2} e L_{cu} : do início da deformação até $\tilde{L}_c = L_{c1}$, a curva é crescente; quando $L_{c1} < \tilde{L}_c \leq L_{c2}$, a tensão torna-se temporariamente constante; por fim, quando $\tilde{L}_c > L_{c2}$, a tensão decresce linearmente a zero em direção à deformação última $\tilde{L}_c = L_{cu}$.

Os valores de ε_{c1} e ε_{c2} são tabelados pelo Model Code (International Federation for Structural Concrete, 2010) em função da classe do concreto. Estes são apresentados convertidos a deformações de Green-Lagrange na Tabela 4.

Tabela 4 – Deformações compressivas L_{c1} e L_{c2} por classe do concreto (até C120).

	C12	C20	C30	C40	C50	C60	C70	C80	C90	\geq C100
L_{c1} (‰)	1,8	2,1	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
L_{c2} (‰)	3,5	3,5	3,5	3,5	3,4	3,3	3,2	3,1	3,0	3,0

Fonte: adaptado de Model Code (International Federation for Structural Concrete, 2010).

Já L_{cu} pode ser calculada pela expressão que define a energia de fratura compressiva em função destas deformações:

$$L_{cu} = \frac{2G_{fc}}{l_c f_{cm}} + L_{c1} - L_{c2} \quad (3.16)$$

Por sua vez, a energia de fratura compressiva é estimada pela expressão proposta por Alfarah, López-Almansa e Oller (2017), que segundo testes realizados por Arruda *et al.* (2022), aproxima bem o comportamento das curvas proposto pelo Model Code (International Federation for Structural Concrete, 2010):

$$G_{fc} = 8,6 \cdot (f_{cm})^{0,25} \quad (3.17)$$

Com isto, o dano compressivo D_C é definido pelas seguintes equações:

$$D_C = \begin{cases} 1 - \frac{k\tilde{L}_c^* - (\tilde{L}_c^*)^2}{1 + (k-2)\tilde{L}_c^*} \cdot \frac{f_{cm}}{E\tilde{L}_c} & \text{se } \tilde{L}_c \leq L_{c1} \\ 1 - \frac{f_{cm}}{E\tilde{L}_c} & \text{se } L_{c1} < \tilde{L}_c \leq L_{c2} \\ 1 + \frac{f_{cm}}{E(L_{c1} - L_{c2})} - \frac{f_{cm}}{E\tilde{L}_c} \left(1 - \frac{L_{c2}}{L_{cu} - L_{c2}}\right) & \text{se } L_{c2} < \tilde{L}_c \leq L_{cu} \end{cases} \quad (3.18)$$

em que:

$$k = 1,05 \frac{EL_{c1}}{f_{cm}} \quad (3.19)$$

$$\tilde{L}_c^* = \frac{\tilde{L}_c}{L_{c1}} \quad (3.20)$$

A partir das equações apresentadas nesta seção, é possível derivar todos os parâmetros de dano apenas conhecendo a resistência à compressão e o módulo de elasticidade do concreto. Este último por vezes não é aferido em trabalhos encontrados na literatura, situação em que, seguindo a orientação da NBR 6118 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2023), pode ser feito igual ao módulo de elasticidade secante, E_{cs} , calculado pela seguinte equação:

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci} \quad (3.21)$$

em que E_{ci} é obtido pela Equação 3.6, e:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (3.22)$$

com f_{ck} dado em MPa.

4 ESTRUTURA DO CÓDIGO COMPUTACIONAL

A implementação da formulação do MEFP apresentada no capítulo 2 associada ao modelo de dano adaptado descrito no capítulo 3 é realizada por meio de um código computacional na linguagem de programação Fortran®, utilizando o ambiente de desenvolvimento integrado Microsoft Visual Studio (Microsoft..., 2022).

O código é detalhado neste capítulo em três partes: a leitura de dados e o pré-processamento, em que os dados do problema são coletados e algumas grandezas fixas são calculadas; o processamento, que envolve a montagem e solução do sistema de equações em cada passo do processo iterativo; e o pós-processamento, que consiste na impressão dos dados de saída na forma de gráficos e em arquivo formatado para o *software* de visualização AcadView (Paccola; Coda, 2005).

Ao final do capítulo, é apresentado um fluxograma resumindo o funcionamento do algoritmo.

4.1 Leitura de dados e pré-processamento

Todos os dados do problema a ser simulado devem ser informados em um arquivo de texto devidamente formatado. Neste arquivo, devem constar:

- o número de passos de carga, a tolerância do processo iterativo e o número máximo de iterações;
- os dados da malha da matriz: coordenadas dos nós, propriedades e parâmetros de dano do(s) material(is) e incidência dos nós sobre os elementos;
- os dados dos elementos imersos: treliças, faces ativas, vazios esféricos e vazios alveolares;
- as condições de contorno: cargas aplicadas e deslocamentos prescritos;
- os dados para a impressão de gráficos.

No código, as condições de contorno são aplicadas em incrementos de acordo com o número de passos de carga. Em cada passo, as forças e os recalques prescritos são incrementados de $\vec{D}\vec{F}$ e $\vec{D}\vec{Y}$, respectivamente, que são os valores prescritos totais divididos pelo número de passos. Esta estratégia permite a geração de gráficos avaliando a evolução, por exemplo, do deslocamento de um ponto com o carregamento aplicado dentro de uma análise estática. Além disso, a aplicação gradual das condições de contorno facilita a

convergência do processo de solução não linear: por vezes, aumentar o número de passos de carga reduz o tempo total da simulação.

No processo iterativo de solução do sistema não linear, a tolerância é o valor mínimo de $\|\Delta\vec{Y}\|/\|\vec{X}\|$ para que se considere a solução satisfatória e se prossiga para o passo de carga seguinte. Dentro de um passo de carga, se for atingido o número máximo de iterações, ou se o erro atingir um valor muito elevado, se julga que não houve convergência e a simulação é encerrada. Considera-se elevado um valor de erro superior a 1.

Após a leitura dos dados, são calculadas e guardadas as grandezas que dependem apenas das informações do problema em seu estado inicial, e portanto são fixas em todo o processo de solução, como \mathbf{A}^0 .

Os elementos imersos tridimensionais vazios possuem os formatos fixos esférico ou cilíndrico. Por esta razão, é mais prático deixar a geração das coordenadas dos nós destes elementos a cargo do código com base em dados geométricos básicos. É neste ponto que este processo ocorre.

No caso dos vazios esféricas, basta informar o raio e das coordenadas do centro da esfera. Já para as exclusões alveolares, os dados informados são o comprimento do elemento, correspondente à altura do cilindro, e três pontos que pertencem à sua base circular: C , R e P . O vetor \vec{CP} define o raio da base, e o vetor que resulta da operação $\vec{CR} \wedge \vec{CP}$ define o plano ao qual a base pertence e a direção da altura do cilindro.

Quando há elementos imersos de treliça ou vazios, isto é, imersões com nós independentes, é realizado neste ponto o processo de verificação da incidência dos nós descrito na seção 2.6.1.

4.2 Processamento dos dados

A etapa de processamento consiste em dois laços: o laço de passos de carga e, dentro deste, o laço de iterações do processo de solução. No início de cada passo de carga, as forças externas (inicialmente nulas) e posições atuais são incrementadas, respectivamente, de \vec{DF} e \vec{DY} .

O laço do processo de solução se repete até que o erro seja inferior à tolerância ou até que o número máximo de iterações seja atingido. Neste laço, são montados os vetores de forças internas e as matrizes hessianas locais relativos aos elementos de matriz e aos elementos imersos. Os entes locais contribuem para os entes globais \vec{g} e \mathbf{H} e o sistema é resolvido para $\Delta\vec{Y}$.

O cálculo de cada tipo de elemento é contido em uma subrotina que em si constitui um laço para o cálculo dos elementos individuais. Este ponto do código, em especial para os elementos tridimensionais, é o maior gargalo para o tempo de processamento. Por esta razão, foi implementado o paralelismo utilizando a interface de programação OpenMP®,

integrado ao Intel® oneAPI Base Toolkit (Intel. . . , 2023a). Esta ferramenta permite que os núcleos de processamento do computador resolvam elementos simultaneamente, proporcionando grande ganho de tempo nas simulações.

Dentro da rotina de cálculo dos elementos da matriz, há o cálculo das grandezas de dano D e L_{do} , que é feito por ponto de integração. Em cada ponto, estas variáveis são inicializadas como $D = 0$ e L_{do} igual ao valor informado para o material, e são atualizadas após o fim de cada passo de carga. É imposto para D que não seja inferior ao valor atingido no passo de carga anterior, pois a danificação é irreversível; e também que não supere um valor limite ligeiramente inferior a 1 para impedir a degeneração completa do material. Em todas as simulações realizadas neste trabalho, optou-se por limitar o valor de D a 0,95.

A matriz hessiana global \mathbf{H} é uma matriz simétrica esparsa. Para proporcionar economia de memória e eficiência no processo de solução, os dados desta matriz são armazenados em três vetores contendo os índices da linha, índices da coluna e dados. Deste modo, apenas os termos não nulos e da diagonal para cima são registrados. O manejo de matrizes esparsas é assistido pelo módulo SparseSET (Piedade Neto; Paccola, 2020).

Para a solução do sistema, é utilizada a rotina *pardiso* da Intel® oneAPI Math Kernel Library (Intel. . . , 2023b), especializada na solução de sistemas lineares esparsos. Devido a problemas de convergência encontrados em simulações com exclusões, foi adotado o valor de -2 para o parâmetro *mtype*, direcionando a rotina para matrizes não positivo definidas.

4.2.1 Considerações para problemas com dano e exclusões

Individualmente, simulações com a presença de dano ou com a presença de exclusões alcançaram a convergência até patamares satisfatórios de carga sem maiores complicações. Porém, maiores dificuldades foram encontradas quando o dano foi associado a problemas com vazios. Esta dificuldade era esperada, pois os dois fenômenos contribuem independentemente para a redução da rigidez dos elementos da matriz, e se não for tomado cuidado, a rigidez dos elementos de matriz pode se tornar negativa, eventualmente provocando a não convergência da simulação.

Uma observação que deve ser feita é que nas regiões da matriz envoltas por exclusões naturalmente não há concreto e, portanto, não faz sentido calcular o dano nestas regiões. Assim, no pré-processamento, é construído um vetor que indica quais pontos de integração estão dentro de vazios na malha de modo a dispensar o cálculo do dano nestes.

A identificação dos pontos de integração que estão dentro dos vazios esféricos é simples, bastando verificar se a distância entre o ponto e o centro de cada esfera é inferior a seu raio.

Já para os vazios cilíndricos, é realizado o processo de identificação de imersão de

um nó em um elemento descrito na seção 2.6.1, mas para verificar a incidência de pontos de integração sobre elementos prismáticos de exclusão. No entanto, por razão que será explicada adiante, o processo é modificado para que apenas se verifique se o ponto pertence à exclusão no domínio de ξ_3 , sendo a verificação no plano ξ_1 - ξ_2 feita pelo traçado de um vetor a partir do eixo do cilindro até o ponto que se está verificando. Considera-se o ponto pertencente ao vazio se este está a uma distância do eixo do cilindro igual ou inferior ao raio circular da seção do alvéolo.

Não obstante, foram encontradas dificuldades para que simulações com dano e exclusões atingissem a convergência. Em decorrência disto, são propostas estratégias adicionais que, embora não sejam necessariamente realistas, buscaram viabilizar as simulações.

Pontua-se de antemão que estas estratégias não foram suficientes para proporcionar a convergência nestes casos, mas são aqui descritas para fins de relatório.

As estratégias são efetivadas a partir da variação de três fatores, chamados parâmetros de convergência, aqui introduzidos, α_1 , α_2 e α_3 , inicialmente iguais a 1.

Fator de redução da rigidez negativa. As exclusões em estudo neste trabalho podem ser vazias ou preenchidas por um material não resistente, como o isopor. Embora a rigidez deste material de preenchimento seja irrisória para o desempenho da estrutura, a presença de um material de preenchimento inspirou a consideração de que uma porcentagem da rigidez do concreto ainda atua sobre as regiões vazias.

Portanto, admite-se nas simulações rigidez das exclusões igual a $-\alpha_1 E$, em que α_1 é a fração da rigidez que se deseja retirar da matriz, sendo feito inferior a 1 para a aplicação desta estratégia.

Raio de não danificação ao redor dos vazios. Nas simulações, observou-se que o dano surge ao redor das exclusões mesmo para valores reduzidos de carga. Este fenômeno ocorre devido à fragilidade dos elementos que possuem vazios, o que ocasiona em valores de deformação elevados que eventualmente superam L_{d0} . Embora seja esperado que as tensões que ocorrem na estrutura com vazios sejam superiores às de uma estrutura equivalente íntegra, espera-se que ocorra a distribuição destas tensões para além das regiões com vazios.

No processo iterativo, este fenômeno de redistribuição da tensão ocorre, mas observou-se que os danos elevados que surgem nas imediações dos vazios eventualmente se espalham descontroladamente na estrutura, ocasionando em aumento irreversível do deslocamento e na não convergência. Buscando mitigar este fenômeno indesejado, optou-se por limitar a ocorrência do dano a regiões suficientemente distantes das exclusões.

No caso das exclusões esféricas, o dano é limitado a regiões afastadas de $\alpha_2 r$ do centro de cada bolha. Já para as exclusões alveolares, durante o processo de verificação da incidência dos pontos sobre as exclusões, aplica-se sobre o raio a partir do eixo do

alvéolo o fator α_3 , sendo esta a razão para a modificação no processo. Intuitivamente, o incremento dos fatores α_2 e α_3 aumenta a região de envoltura das exclusões que é isenta de danificação.

4.3 Pós-processamento e impressão dos dados de saída

No código, o tratamento e impressão dos dados é realizado ao fim de cada passo de carga. Após a convergência do processo de solução não linear, dois tipos de arquivos de saída são produzidos: um arquivo de visualização da malha e arquivos gráficos.

Antes de formatá-los, são preparados tensores que guardam as informações, armazenadas por nó, a serem impressas: os deslocamentos nas 3 direções (u_1 , u_2 e u_3), 3 tensões normais (σ_{11} , σ_{22} e σ_{33}) e 3 tensões de cisalhamento (σ_{12} , σ_{13} e σ_{23}).

Os deslocamentos são simplesmente obtidos pela subtração do vetor de posições nodais atuais \vec{Y} pelo vetor de posições nodais iniciais \vec{X} .

Note que a notação σ_{ij} foi utilizada para as tensões. Estas são as tensões de Cauchy, verdadeiramente definidas pelo que se conhece por tensão, que é a atuação de uma força sobre uma área em descrição Euleriana (na configuração atual). As tensões de Piola-Kirchhoff (S_{ij}), embora essenciais para a definição do modelo constitutivo de SVK, não possuem este significado, além de estarem em descrição Lagrangiana (na configuração inicial). Convenientemente, como demonstrado por Coda (2018), é possível derivar destas a tensão de Cauchy com a seguinte relação:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T}{\det(\mathbf{A})} \quad (4.1)$$

As tensões de Cauchy são calculadas a partir das tensões de Piola-Kirchhoff durante o processamento para cada ponto de integração. Contudo, para a impressão dos resultados é necessário conhecer os valores nodais.

Os elementos prismáticos de ordem cúbica possuem 40 nós e, conforme estabelecido na seção 2.5, são adotados 48 pontos de integração. As tensões nos pontos de integração podem ser relacionadas com as tensões nodais ($\hat{\boldsymbol{\sigma}}$), incógnitas, pela seguinte equação matricial:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(6 \times 48)} = \boldsymbol{\phi}_{(48 \times 40)} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{(40 \times 6)} \quad (4.2)$$

em que $\boldsymbol{\phi}$ é uma matriz, montada no pré-processamento, que guarda a avaliação, nos 48 pontos de integração, das funções de forma do elemento correspondentes aos 40 nós.

Portanto, tem-se na Equação 4.2 um conjunto de 6 sistemas de 48 equações e 40 incógnitas. A escolha de um número de pontos de integração maior do que o mínimo

necessário é para que este sistema não seja subdeterminado. Uma solução aproximada é calculada com o auxílio da rotina *dgels*, parte de um dos módulos inclusos na Intel® oneAPI Math Kernel Library (Intel. . . , 2023b), que resolve sistemas retangulares pelo método dos mínimos quadrados.

4.3.1 Impressão da malha no AcadView

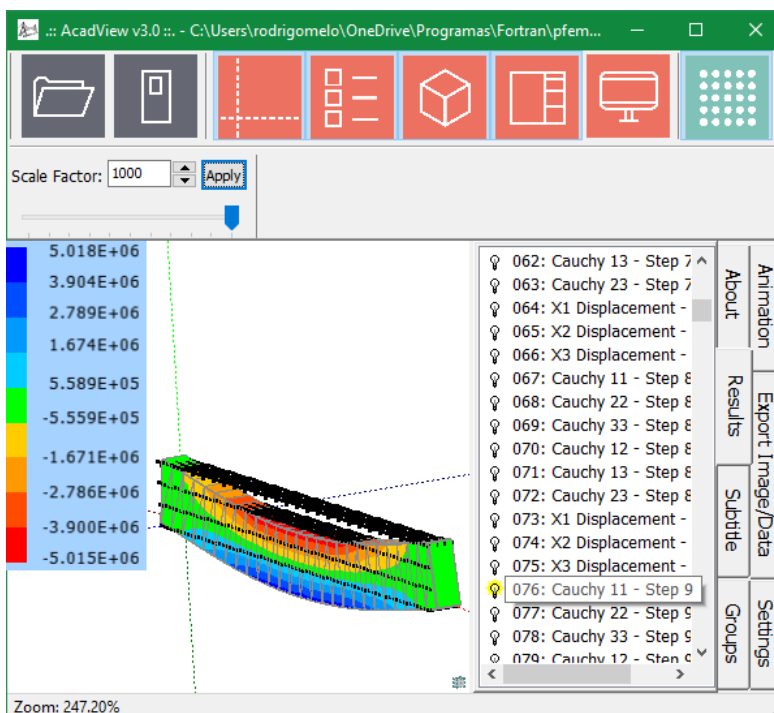
Um arquivo de visualização da malha é formatado para o *software* AcadView (Paccola; Coda, 2005). O programa permite a exibição da malha em seus estados indeformado e deformado, além de gerar um mapa de cores com base em dados nodais — neste caso, deslocamentos e tensões.

O arquivo possui um cabeçalho em que são informados o número de nós, o número de elementos e o número de listas, que são conjuntos de coordenadas deformadas associados a dados numéricos para gerar o mapa de cores. Na sequência, são informados os dados relativos aos nós e aos elementos em seu estado indeformado.

Ao final de cada passo de carga, o arquivo é alimentado com 9 listas correspondentes aos deslocamentos e tensões. As coordenadas impressas correspondem à posição atual dos nós, de modo que a malha é exibida em seu aspecto deformado.

Na Figura 20 é exemplificada a visualização de uma malha deformada no *software*, com o mapa de cores ativo para as tensões de Cauchy na direção 11.

Figura 20 – Janela do AcadView.



Fonte: o próprio autor.

4.3.2 Impressão de dados para gráficos no Gnuplot

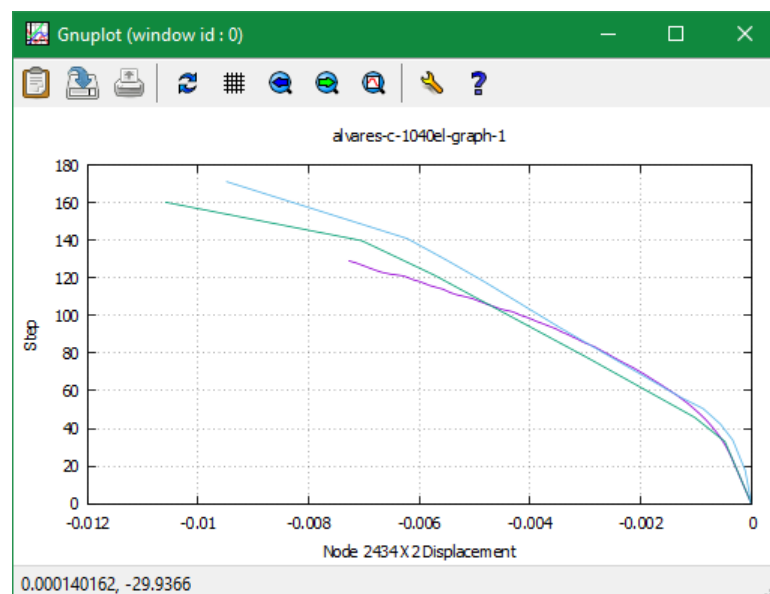
A visualização da malha é importante para atestar o bom comportamento geral das simulações, mas para validá-las de fato, é necessário coletar dados como deslocamentos ou deformações pontuais e confrontá-los com os dados apresentados por outras referências. É para este fim que o código conta com a impressão de dados nodais na forma de gráficos.

No arquivo de entrada, deve ser informado o número de gráficos que se deseja gerar, e para cada gráfico o par de informações que se deseja coletar para compor os eixos horizontal e vertical. Os tipos de dados suportados são o passo de carga atual e, para um nó especificado, os deslocamentos nas 3 direções e as 6 tensões independentes de Cauchy.

Os dados são impressos em um arquivo de texto e é gerado um arquivo adicional compatível com o *software* Gnuplot, uma robusta ferramenta de exibição de gráficos. A principal preocupação nesta funcionalidade foi a visualização em tempo real da evolução de um dado da simulação em relação aos dados de referência, e por esta razão, não houve grande preocupação com a estética das exibições.

Na Figura 21, por exemplo, a curva roxa mostra a evolução do deslocamento de um determinado ponto em relação ao passo de carga. As demais curvas são os dados coletados da referência.

Figura 21 – Janela do Gnuplot.

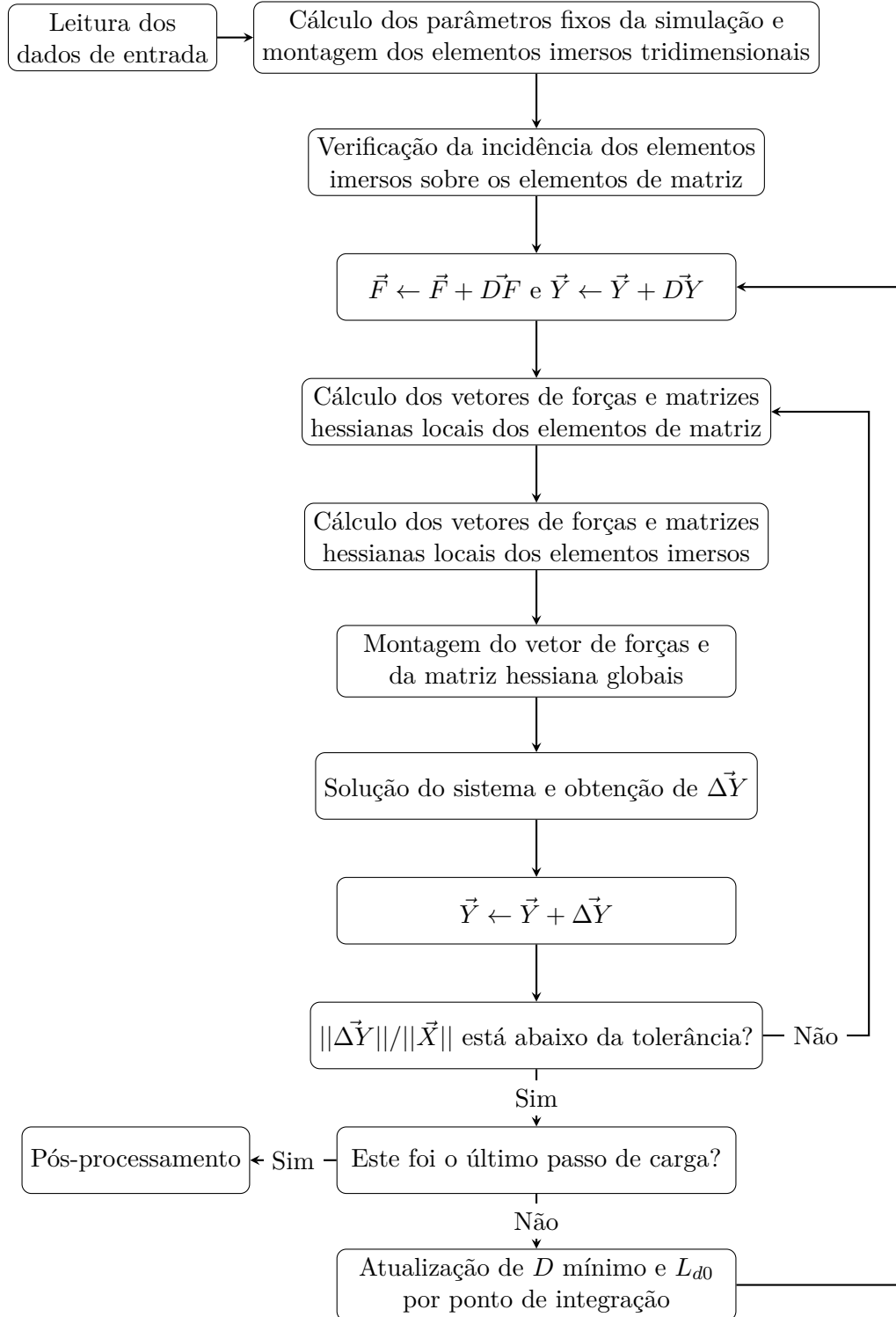


Fonte: o próprio autor.

4.4 Fluxograma

O fluxograma da Figura 22 ilustra resumidamente a estrutura do código computacional.

Figura 22 – Fluxograma do código computacional.



Fonte: o próprio autor.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, são apresentadas quatro aplicações do código computacional desenvolvido em exemplos da literatura. Na seção 5.1, o intuito do exemplo é verificar a consistência do modelo de dano, além do bom funcionamento do modelo numérico e da sua implementação. Já nas seções 5.2, 5.3 e 5.4, a formulação é aplicada a experimentos práticos em lajes *steeldeck*, *bubbledeck* e alveolar, respectivamente, cumprindo o objetivo do presente trabalho.

Para todas as simulações, foram adotados os valores de tolerância de 10^{-6} e limite de 1.000 iterações por passo de carga. Como já mencionado, todos os elementos bidimensionais e tridimensionais possuem grau cúbico, enquanto os elementos de treliça utilizam grau linear de aproximação.

5.1 Alvares (1993): Danificação de viga

Alvares (1993) aplicou o modelo de dano contínuo de Mazars (1984) a estruturas de concreto armado. Em seu trabalho, ensaios foram realizados em vigas com diferentes taxas de armadura, e a partir da calibração dos parâmetros do modelo, as curvas de força \times deslocamento foram reproduzidas numericamente de maneira satisfatória.

Segundo o autor, os parâmetros ε_{d0} , A_T e B_T puderam ser deduzidos a partir de dados experimentais de ensaios realizados no concreto, ao passo que A_C e B_C foram extraídos de outras aplicações encontradas na literatura. Porém, o autor ressalta que estes dois últimos são dependentes da malha de elementos finitos adotada.

Para validar a implementação da adaptação do modelo de dano proposta por Arruda *et al.* (2022), apenas as propriedades materiais do concreto e do aço e a deformação de danificação inicial, todos advindos de ensaios, são extraídos da referência conforme a Tabela 5.

Tabela 5 – Exemplo 1: Parâmetros extraídos de Alvares (1993).

Parâmetro	Concreto	Aço
E (MPa)	29.200	196.000
ν	0,2	0,3*
L_{d0} (‰)	0,07	-

Fonte: Alvares (1993).

*Adotado conforme NBR 8800 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2021).

Os parâmetros do modelo adaptado são derivados do módulo de elasticidade e do f_{ck} do concreto seguindo o procedimento da seção 3.2. É adotado $f_{ck} = 20,5$ MPa, como feito por Silva (2023), ao utilizar este mesmo exemplo para validar uma adaptação alternativa do modelo. Os valores calculados são apresentados na Tabela 6.

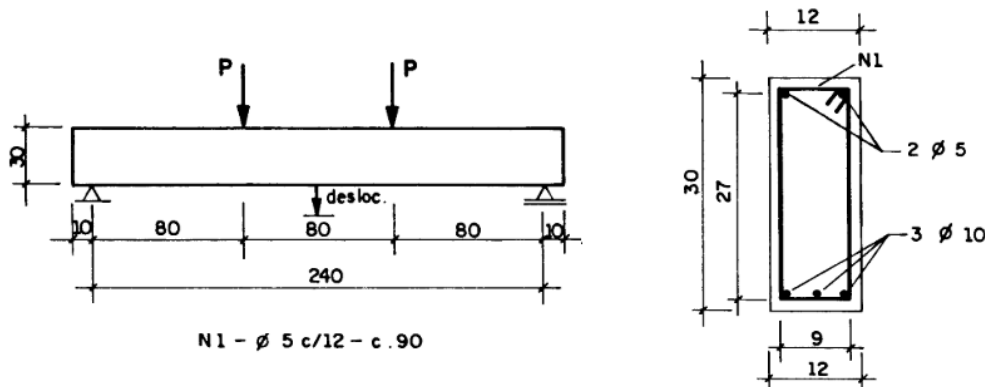
Tabela 6 – Exemplo 1: Parâmetros calculados.

Parâmetro	Valor
f_{cm} (MPa)	28,5
f_{ctm} (MPa)	2,799
G_f (N/m)	133,412
G_{fc} (N/m)	19,875
L_{c1} (‰)	2,1
L_{c2} (‰)	3,5

Fonte: o próprio autor.

A viga selecionada para as simulações, com suas dimensões e configuração de ensaio de flexão a quatro pontos, é apresentada na Figura 23. O ensaio foi realizado em dois exemplares. Na Figura, também é indicado o ponto de aferimento dos deslocamentos.

Figura 23 – Exemplo 1: Viga ensaiada (dimensões em cm, armaduras em mm).

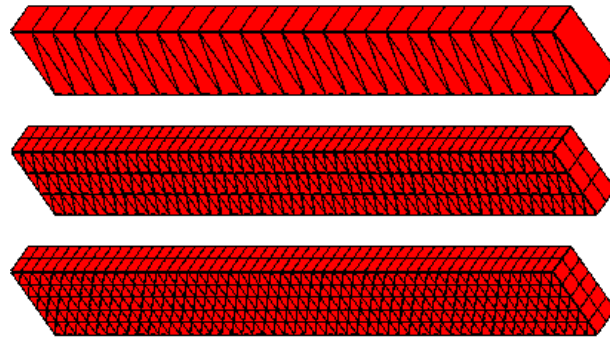


Fonte: Alvares (1993).

Para a matriz de concreto da viga, foram elaboradas 3 malhas com diferentes níveis de discretização: com 52, 624 e 1.040 elementos (Figura 24). Fixou-se 26 elementos de treliça imersos para representar cada uma das barras longitudinais. Devido ao efeito predominante neste exemplo ser o da flexão e não do cisalhamento, optou-se por desprezar os estribos.

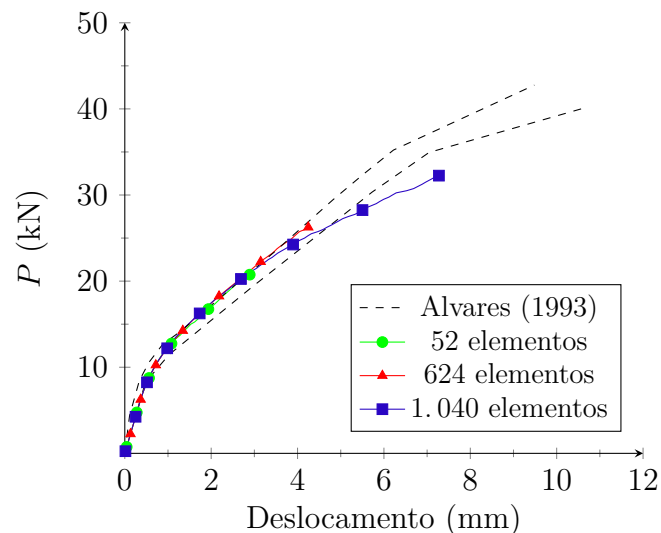
A análise numérica foi realizada com controle de força, com passos de carga de 0,25 kN até o patamar $P = 50$ kN. Os resultados obtidos são apresentadas na Figura 25 em confronto com as curvas experimentais de referência.

Figura 24 – Exemplo 1: Malhas da matriz de concreto.



Fonte: o próprio autor.

Figura 25 – Exemplo 1: Resultados.



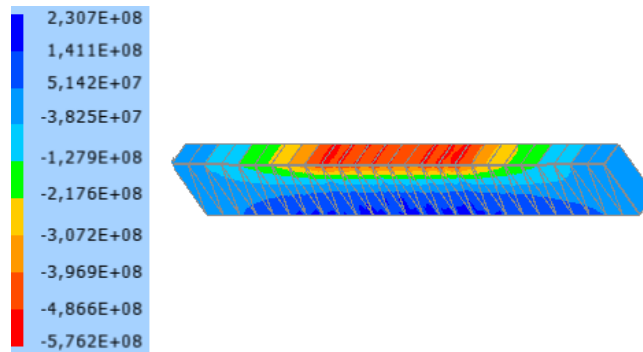
Fonte: o próprio autor.

Todas as simulações foram encerradas antes de atingir o patamar final de carga devido a atingirem o limite de iterações sem encontrar convergência. Não obstante, a carga alcançada foi suficiente para observar o surgimento do dano (aproximadamente a $P = 10$ kN) e sua progressão até o ponto onde uma segunda mudança na inclinação ocorre (sob o deslocamento de cerca de 7 mm).

De qualquer forma, foi observada boa coincidência entre as curvas experimentais e numéricas por boa parte do ensaio, embora, a partir de certo ponto, os deslocamentos tenham sido superestimados e tenha ocorrido a perda da convergência sob cargas próximas à ruptura. Além disso, houve consistência dos resultados independentemente da malha, validando a implementação do MEFP e do modelo de dano adaptado. Notou-se que o maior refinamento da malha permitiu a convergência para valores mais elevados de carga.

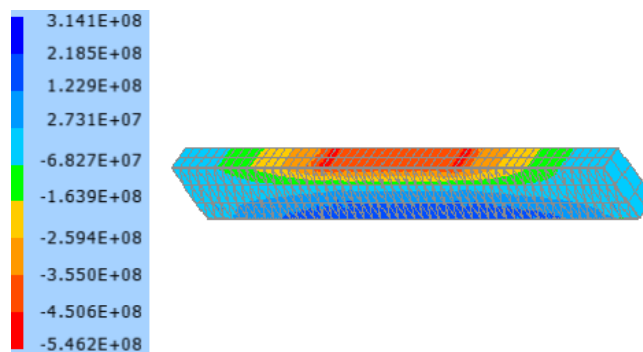
Ademais, as distribuições da tensão na direção longitudinal da viga das três malhas sob o carregamento $P = 20$ kN são apresentadas nas Figuras 26, 27 e 28. Observa-se uniformidade entre as três distribuições, com variação máxima entre a tensão máxima de compressão atingida no concreto na ordem de 2,5%.

Figura 26 – Exemplo 1: Tensões longitudinais (em Pa) na malha de 52 elementos.



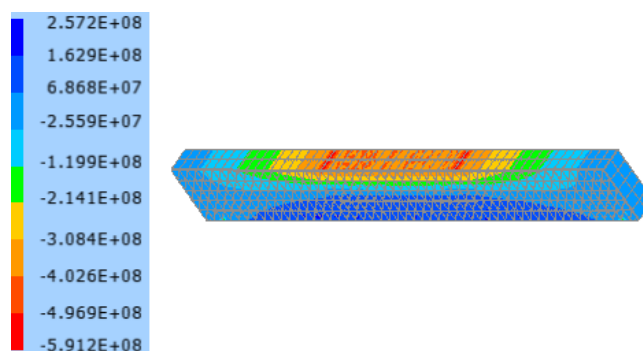
Fonte: o próprio autor.

Figura 27 – Exemplo 1: Tensões longitudinais (em Pa) na malha de 624 elementos.



Fonte: o próprio autor.

Figura 28 – Exemplo 1: Tensões longitudinais (em Pa) na malha de 1.040 elementos.



Fonte: o próprio autor.

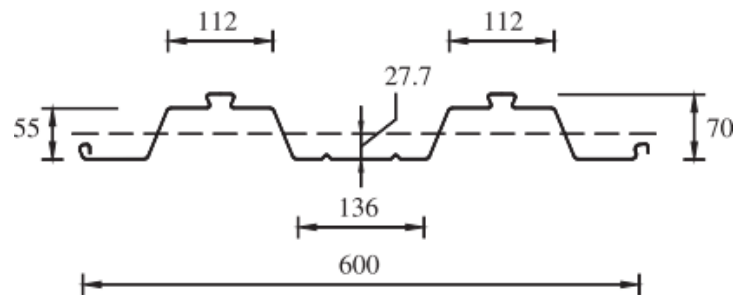
5.2 Gholamhoseini *et al.* (2014): Laje *steeldeck*

Para avaliar a influência do escorregamento na performance de lajes *steeldeck*, Gholamhoseini *et al.* (2014) realizaram ensaios em lajes com diversos perfis e reproduziram-os com modelos numéricos tridimensionais criados no *software* ATENA 3D. Nestes, a danificação do concreto foi considerada a partir de uma lei de abertura de fissuras baseada na energia de fratura. Duas modelagens foram realizadas: uma considerando adesão perfeita entre o concreto e o aço, e uma permitindo o escorregamento entre as interfaces. Como esperado, o segundo modelo se aproximou mais dos ensaios. O modelo sem escorregamento previu que a laje resistiria a patamares muito mais elevados de carga antes da ruptura.

Como a presente teoria presume a aderência por definição, espera-se que os resultados sejam próximos ao modelo sem escorregamento.

Para as simulações, foram selecionadas as lajes fabricadas com o perfil KF-70 (Figura 29), com dimensões após a concretagem de $3,3 \text{ m} \times 1,2 \text{ m} \times 0,15 \text{ m}$ (comprimento \times largura \times altura). Não foram inclusos reforços adicionais.

Figura 29 – Exemplo 2: Perfil KF-70 (dimensões em mm).



Fonte: Gholamhoseini *et al.* (2014).

As lajes foram biapoiadas na direção do comprimento, deixando 0,1 m de cada lado em balanço de modo que o comprimento efetivo do vão (L') foi de 3,1 m. As estruturas foram submetidas a ensaios de flexão a quatro pontos, com as cargas aplicadas a $L'/4$ (ST70-4) e $L'/6$ (ST70-6) dos apoios.

O concreto dos exemplares foi submetido a ensaios de compressão e tração, que determinaram as resistências $f_{ck} = 28 \text{ MPa}$ e $f_{ctm} = 3,5 \text{ MPa}$ e o módulo de elasticidade $E = 30,725 \text{ GPa}$. Conforme orientação da NBR 6118 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2023), admitiu-se $\nu = 0,2$ na ausência de ensaios para determiná-lo. Seguindo o procedimento da seção 3.2, derivou-se os demais parâmetros do modelo de dano. Estes são apresentados na Tabela 7.

Tanto nos ensaios como nas simulações realizadas, foi aferida a deflexão no ponto central da face inferior dos *decks*. Para comparação, este dado é aferido nas presentes simulações.

Tabela 7 – Exemplo 2: Parâmetros calculados.

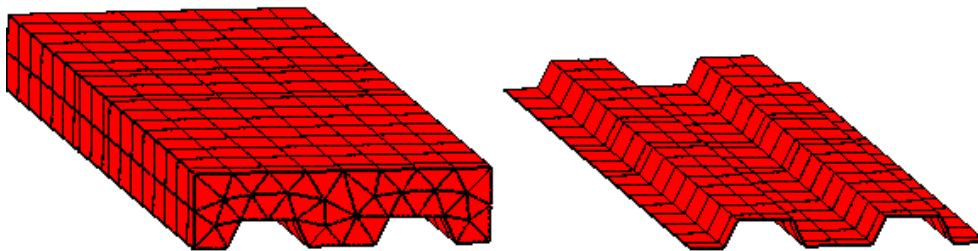
Parâmetro	Valor
L_{d0} (‰)	0,094
f_{cm} (MPa)	36,0
G_f (N/m)	139,142
G_{fc} (N/m)	21,066
L_{c1} (‰)	2,3
L_{c2} (‰)	3,5

Fonte: o próprio autor.

Os perfis de aço têm espessura $t = 0,75$ mm e módulo de elasticidade $E = 212$ GPa, este último verificado por ensaio realizado por Gholamhoseini *et al.* (2014). Foi adotado $\nu = 0,3$ como sugerido pela NBR 8800 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2021) para aços convencionais.

Para as simulações, foi elaborada uma malha com 828 elementos. Tomando vantagem das simetrias nas direções do comprimento e da largura, apenas um quarto da estrutura foi modelado, e as faces cortadas pelos planos de simetria foram condicionadas a não se deslocarem na direção normal às mesmas. Para o deck, 216 elementos de face ativa foram aderidos às faces externas dos elementos inferiores (Figura 30).

Figura 30 – Exemplo 2: Malha da matriz de concreto e elementos imersos.

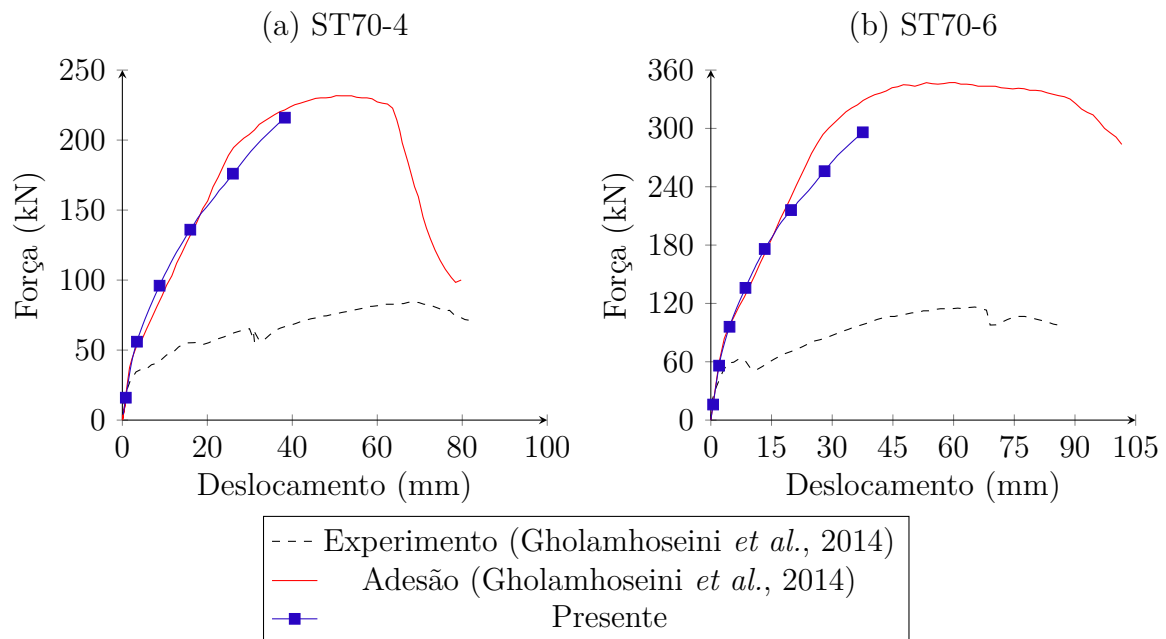


Fonte: o próprio autor.

O carregamento é aplicado na face superior da laje, distribuído na largura e em uma faixa de 50 mm na direção do comprimento, simulando a região de contato da laje com os perfis utilizados para a transferência da carga em laboratório.

Os resultados das simulações relativas aos experimentos ST70-4 e ST70-6 são apresentados na Figura 31 em comparação aos experimentos e às simulações com adesão perfeita do autor. Nos gráficos, P representa o carregamento total, isto é, cada uma das regiões de aplicação de carga recebe $P/2$. As simulações foram realizadas com controle de força até os patamares $P = 240$ kN (ST70-4) e $P = 360$ kN (ST70-6), com passos de carga de 4 kN. Ambas foram interrompidas ao atingir o limite de iterações.

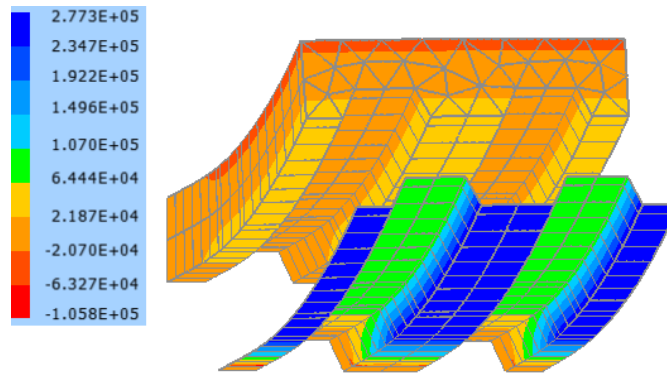
Figura 31 – Exemplo 2: Resultados.



Fonte: o próprio autor.

Como esperado, as curvas obtidas pela simulação foram bastante próximas às simulações com perfeita adesão do autor, validando o bom funcionamento dos elementos imersos de face ativa, embora, como esperado, a adesão não seja uma consideração apropriada a partir de certo patamar de carga. Sob controle de força, alcançou-se convergência até patamares muito próximos à carga máxima dos ensaios. Além disso, seguindo o procedimento para a obtenção dos parâmetros do modelo regularizado de dano, novamente obteve-se uma boa descrição da danificação do concreto, mesmo quando associado a inclusões, embora, novamente, os deslocamentos tenham sido superestimados a partir de certo patamar de carga.

Na Figura 32, é apresentada a distribuição de tensões na direção longitudinal do exemplar ST70-6 obtida pela simulação sob carregamento de $P = 60kN$, ponto de início da proeminência do escorregamento. Note que o concreto e o aço são perfeitamente aderidos, mas são separados na Figura para visualização da interface inferior do concreto. A distribuição ocorre como esperado, e observa-se que a tração da estrutura é absorvida em grande parte pelas faces mais inferiores do *deck*.

Figura 32 – Exemplo 2: Tensões longitudinais (em Pa) no concreto e no *deck*.

Fonte: o próprio autor.

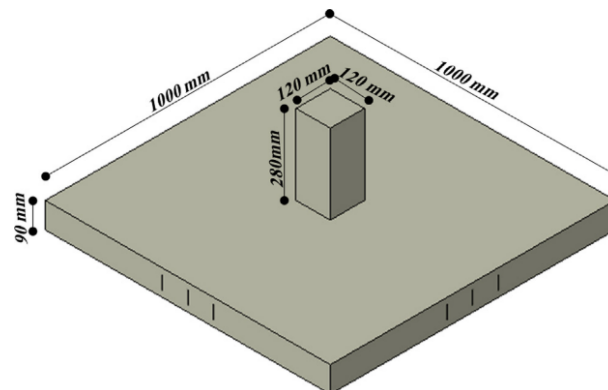
5.3 Al-Gasham, Mhalhal e Jabir (2019): Laje *bubbledeck*

O trabalho de Al-Gasham, Mhalhal e Jabir (2019) teve o objetivo de analisar a performance ao cisalhamento de lajes *bubbledeck* quando reforçadas por chapas de aço dispostas longitudinalmente. Foram ensaiadas uma laje íntegra e uma laje *bubbledeck* reforçada apenas com barras de aço, além dos exemplares com reforços alternativos. Adicionalmente, modelos tridimensionais foram elaborados no *software* ABAQUS para replicar os ensaios. Nestes, um modelo de plasticidade danificada do concreto foi aplicado.

Abrangendo o escopo do presente trabalho, os exemplares íntegro (S) e *bubbledeck* reforçado apenas com barras de aço (V0.0) foram selecionados para as simulações.

As lajes têm dimensões conforme a Figura 33, sendo simplesmente apoiadas a 50 mm de cada uma das quatro bordas. Junto às lajes, foram concretados pilares centrais. Nos ensaios, o carregamento é aplicado no topo do pilar, garantindo a uniformidade da distribuição da carga na estrutura de interesse.

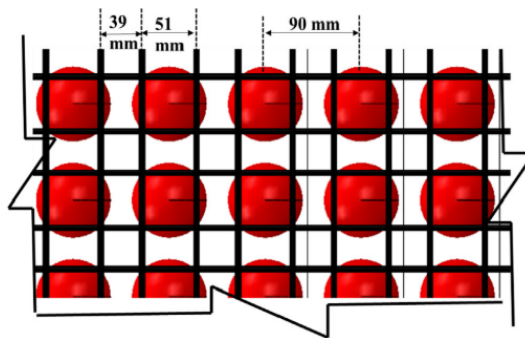
Figura 33 – Exemplo 3: Dimensões da laje.



Fonte: Al-Gasham, Mhalhal e Jabir (2019).

As lajes são armadas em cada direção com 22 barras positivas e 22 barras negativas de diâmetro de 6 mm. O cobrimento de concreto a partir das faces inferior e superior é de 10 mm. As barras são espaçadas de modo a servir de apoio para as esferas nos exemplares que as incluem (Figura 34).

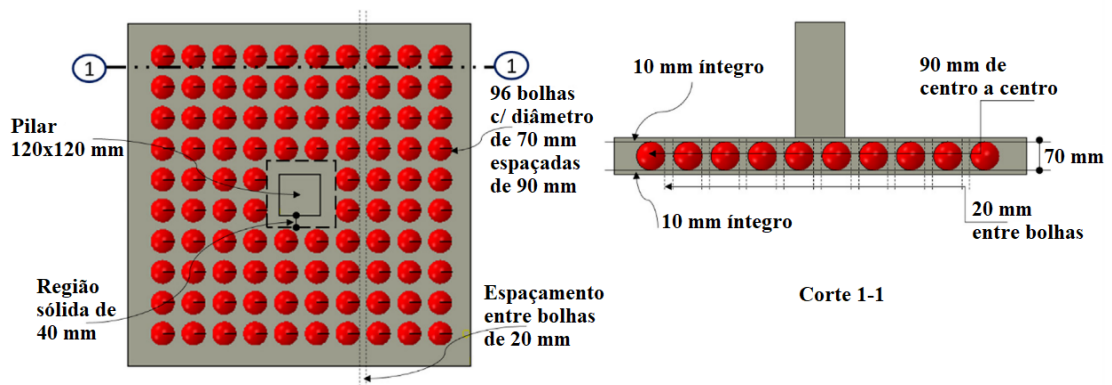
Figura 34 – Exemplo 3: Detalhe do espaçamento das armaduras de reforço.



Fonte: Al-Gasham, Mhalhal e Jabir (2019).

Na laje V0.0, são dispostos 96 vazios conforme a Figura 35. Note que a região próxima ao ponto de aplicação da carga, no pilar, é mantida íntegra devido à proeminência de esforços cortantes.

Figura 35 – Exemplo 3: Disposição dos vazios na laje V0.0.



Fonte: adaptado de Al-Gasham, Mhalhal e Jabir (2019).

O valor de resistência média do concreto a 28 dias foi de $f_{ck} = 28,8$ MPa de acordo com ensaio realizado por Al-Gasham, Mhalhal e Jabir (2019). Deste valor de resistência deriva-se as demais propriedades do modelo de dano, apresentadas na Tabela 8.

Tanto nos ensaios como nas simulações de referência, foi aferida a deflexão do ponto central da face inferior da laje. Para comparação, este dado é aferido nas presentes simulações.

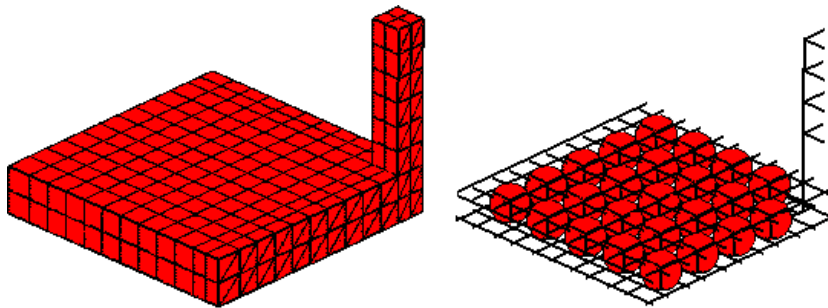
Tabela 8 – Exemplo 3: Parâmetros calculados.

Parâmetro	Valor
L_{d0} (‰)	0,07
f_{cm} (MPa)	36,2
f_{ctm} (MPa)	2,8
E_{cs} (MPa)	26.206
G_f (N/m)	139,280
G_{fc} (N/m)	21,095
L_{c1} (‰)	2,3
L_{c2} (‰)	3,5

Fonte: o próprio autor.

Para as simulações, foi elaborada uma malha com 624 elementos de matriz e 599 elementos de treliça, além de 24 exclusões esféricas na laje V0.0 (Figura 36). Aproveitando a dupla simetria, modelou-se apenas um quarto da estrutura, condicionando as faces cortadas pelos planos de simetria a não se deslocarem na direção normal às mesmas. A carga total sobre os pilares foi aplicada em passos de 1,25 kN.

Figura 36 – Exemplo 3: Malha da matriz de concreto e elementos imersos.



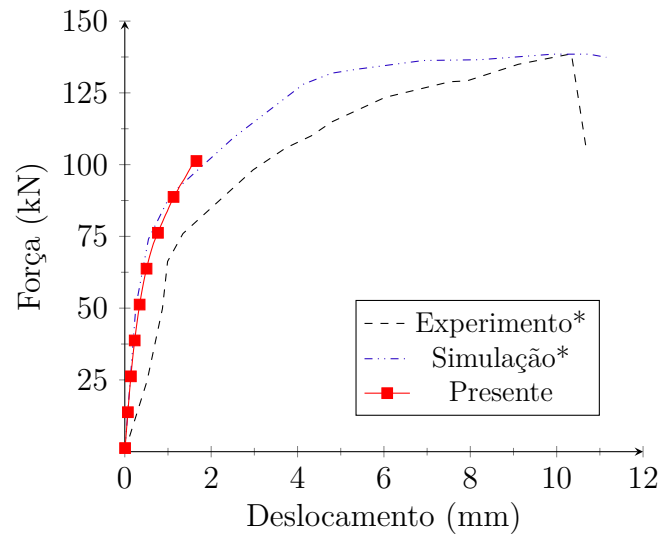
Fonte: o próprio autor.

Inicialmente foi simulado o exemplar S, sem vazios, para verificar o funcionamento do modelo de dano. O resultado é confrontado com os dados de referência na Figura 37.

A análise foi encerrada sob a carga $P = 103,75$ kN devido a atingir o limite de iterações sem convergência. Até este patamar de carga, que está próximo à ruptura da estrutura, houve excelente coincidência com os dados da referência.

Na sequência, o exemplar V0.0 foi simulado sem a presença do dano com o objetivo de validar a contribuição dos elementos de exclusão. A análise alcançou o último passo de carga sem dificuldades na convergência, mas como esperado, não houve a manifestação de não linearidades, ocasionando em uma reta no gráfico de força \times deslocamento na Figura 38.

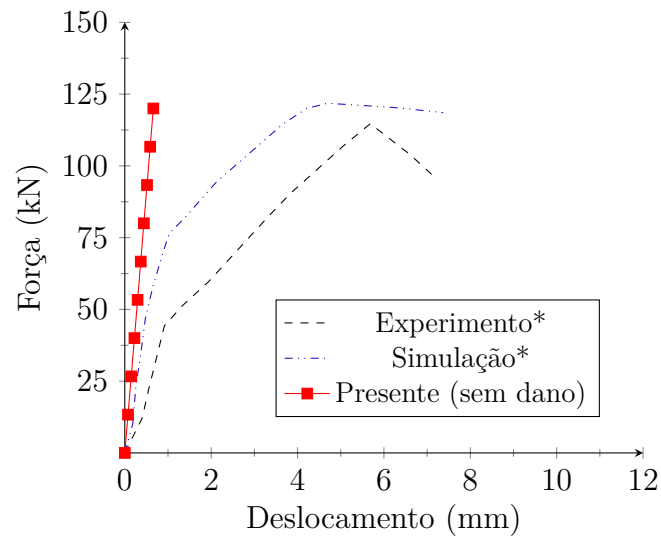
Figura 37 – Exemplo 3: Resultados (laje S).



Fonte: o próprio autor.

*Dados de Al-Gasham, Mhalhal e Jabir (2019)

Figura 38 – Exemplo 3: Resultados (laje V0.0).



Fonte: o próprio autor.

*Dados de Al-Gasham, Mhalhal e Jabir (2019)

No início da curva do exemplar V0.0, nota-se que há um curto trecho com inclinação superior ao trecho linear em seguida. A simulação do presente trabalho não conseguiu recuperar este fenômeno. Ademais, o resultado obtido é uma reta cuja inclinação é relativamente próxima à referência.

Embora o dano e os vazios tenham sido individualmente bem sucedidos em reproduzir o comportamento das estruturas simuladas, o mesmo sucesso não foi obtido ao aplicar dano no exemplar V0.0.

As estratégias de viabilização da convergência propostas na seção 4.2.1 foram testadas extensivamente para diversos valores de α_1 , o fator de redução da rigidez negativa, e α_2 , o fator do raio de danificação ao redor dos vazios. Na Tabela 9, são apresentados os patamares máximos de carga para os quais se obteve convergência para diferentes combinações de parâmetros. Em todos os casos, o critério de interrupção foi a ocorrência de valores de erro elevados (superiores a 1).

Tabela 9 – Exemplo 3: Carga máxima atingida para diferentes parâmetros de convergência.

	$\alpha_2 = 1,0$	$\alpha_2 = 1,1$	$\alpha_2 = 1,3$	$\alpha_2 = 1,5$
$\alpha_1 = 1,00$	3,0 kN	7,5 kN	12,0 kN	7,5 kN
$\alpha_1 = 0,95$	4,5 kN	3,0 kN	9,0 kN	19,5 kN
$\alpha_1 = 0,90$	12,0 kN	7,5 kN	15,0 kN	7,5 kN

Fonte: o próprio autor.

A aplicação dos parâmetros de convergência em relação à sua não aplicação (situação em que ambos os parâmetros são iguais a 1) permitiu que a simulação alcançasse maiores patamares de carga em alguns casos. No entanto, foi insuficiente para levá-la ao ponto em que se pudesse observar a não linearidade da curva força \times deslocamento.

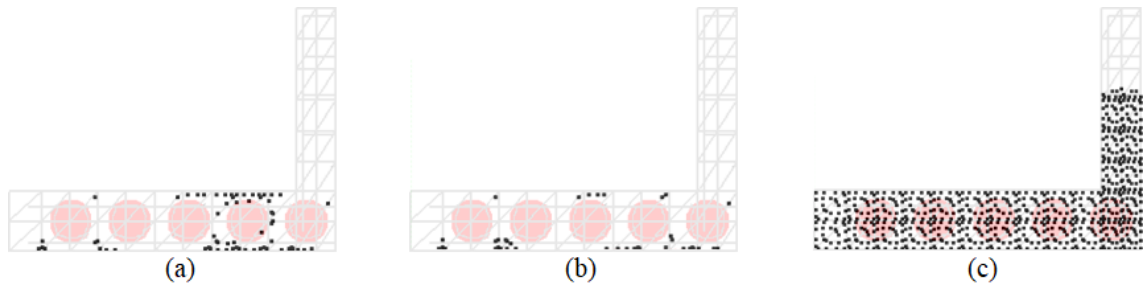
Através da impressão dos pontos de integração danificados em arquivo formatado para o AcadView (Paccola; Coda, 2005), o padrão de danificação dos pontos de integração nestas simulações foi investigado para buscar compreender como ocorre a não convergência nestes casos. A impressão foi realizada para todas as iterações do processo de solução.

Foi observado que o dano surge e se propaga ao redor dos vazios já em patamares baixos de carga. Isto ocorre devido à maior fragilidade dos elementos nessas regiões, que naturalmente ocasiona em valores de deformação suficientes para iniciar a danificação. Nos passos em que ocorre convergência, esta propagação do dano é contida em relação a passos anteriores. Porém, em determinado passo de carga, esta contenção deixa de ocorrer e a danificação se espalha por toda a estrutura, causando o crescimento desenfreado do deslocamento e a não convergência da simulação.

Este comportamento é ilustrado para a simulação que adotou os fatores $\alpha_1 = 0,95$ e $\alpha_2 = 1,5$, a mais bem sucedida entre os testes, na Figura 39, na qual estão impressos os pontos de integração da estrutura em que o dano se manifestou para determinadas iterações. Em (a) e (b), são apresentadas respectivamente a penúltima e última iterações sob o carregamento de 16,5 kN, sendo notável que o espalhamento do dano ao redor de algumas das exclusões é contido na iteração em que ocorre a convergência. Já em (c) está a

iteração em que ocorre a explosão do valor do erro e a não convergência, sob carregamento de 21,0 kN, após o espalhamento do dano por toda a estrutura.

Figura 39 – Exemplo 3: Pontos danificados em simulação do exemplar V0.0.



Fonte: o próprio autor.

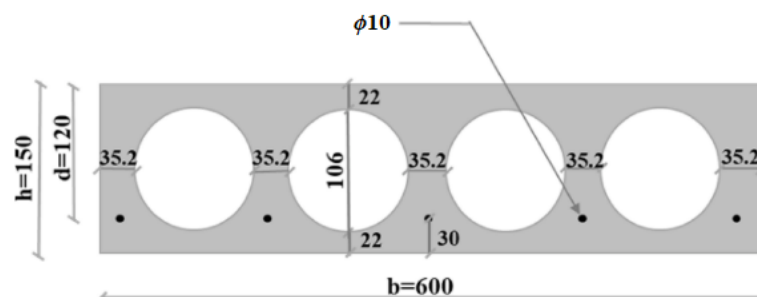
Em face dos resultados, levanta-se a hipótese de que o modelo de dano empregado e a técnica de exclusão são conflitantes, impedindo a convergência das simulações.

5.4 Sahoo *et al.* (2023): Laje alveolar

O trabalho de Sahoo *et al.* (2023) consistiu em um estudo paramétrico da performance de lajes alveolares moldadas *in loco*, modelando exemplares com concreto convencional, com agregados leves e com a adição de fibras. Para o propósito deste trabalho, apenas o exemplar NCA-HCS-3.5, composto por concreto convencional e sem fibras, foi simulado.

Os alvéolos da laje em estudo foram produzidos com canos de PVC, compondo a seção transversal apresentada na Figura 40. Como visto na Figura, a laje também foi reforçada longitudinalmente com cinco barras de aço com diâmetro de 10 mm. Longitudinalmente, a estrutura tem a extensão de 3,4 m e é simplesmente apoiada a 0,2 m de cada uma das bordas, de modo que possui vão efetivo de 3,0 m.

Figura 40 – Exemplo 4: Seção transversal da laje (dimensões em mm).



Fonte: adaptado de Sahoo *et al.* (2023).

Foi realizado um ensaio de flexão a quatro pontos, com cargas equivalentes a $P/2$ aplicadas a 0,42 m de cada um dos apoios. O carregamento é transferido à estrutura por dois perfis metálicos.

A resistência compressiva aos 28 dias do concreto fabricado para os exemplares NCA foi verificada por Sahoo *et al.* (2023) como $f_{ck} = 45$ MPa. Desta resistência, são derivados os demais parâmetros do modelo de dano conforme a Tabela 10.

Tabela 10 – Exemplo 4: Parâmetros calculados.

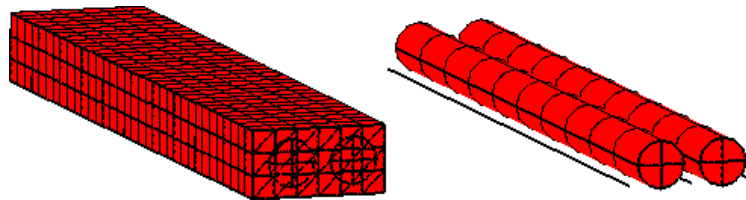
Parâmetro	Valor
L_{d0} (‰)	0,07
f_{cm} (MPa)	53,0
f_{ctm} (MPa)	3,8
E_{cs} (MPa)	34.279
G_f (N/m)	149,174
G_{fc} (N/m)	23,204
L_{c1} (‰)	2,45
L_{c2} (‰)	3,45

Fonte: o próprio autor.

Nos experimentos realizados, foi aferida a deflexão no ponto central da face inferior da laje. Para comparação, este dado é aferido na presente simulação.

Para a simulação, foi elaborada uma malha com 1.224 elementos de matriz, 102 elementos de treliça e 20 exclusões alveolares, caracterizando 80 elementos prismáticos de exclusão imersos (Figura 41). Graças à dupla simetria, foi possível modelar apenas um quarto da estrutura, condicionando as faces cortadas pelos planos de simetria a não se deslocarem na direção normal às mesmas. Replicando as condições experimentais, o carregamento foi distribuído na largura e em uma faixa de 50 mm na direção do comprimento.

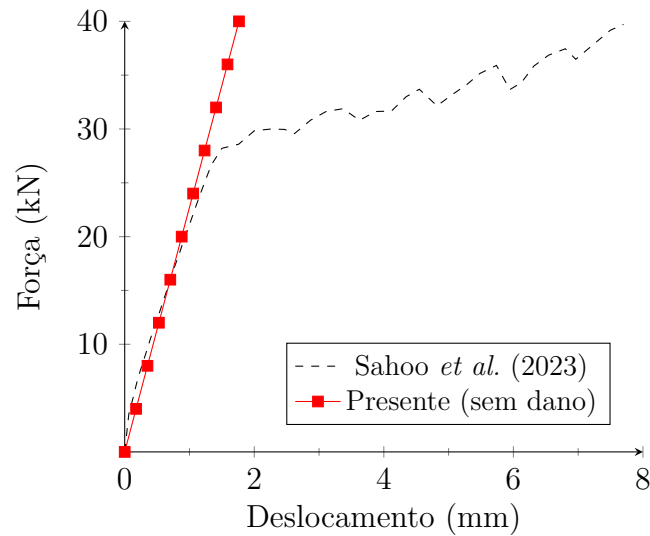
Figura 41 – Exemplo 4: Malha da matriz de concreto e elementos imersos.



Fonte: o próprio autor.

A simulação foi realizada inicialmente sem dano para aferir o bom funcionamento das exclusões formadas por elementos prismáticos imersos. O carregamento total P foi levado até o patamar de 40 kN em passos de carga de 1 kN. Os resultados constam na Figura 42 em confronto com os aferimentos experimentais. Não houve problemas de convergência e notou-se excelente coincidência com o trecho linear da curva.

Figura 42 – Exemplo 4: Resultados.



Fonte: o próprio autor.

Ao introduzir o dano, similarmente à laje *bubbledeck*, ocorreu o fenômeno de espalhamento desenfreado do dano na estrutura, ocasionando na não convergência devido à ocorrência de valores de erro elevados (superiores a 1). Foram realizados testes extensivos com diferentes valores de α_1 , o fator de redução da rigidez negativa, e α_3 , o fator do raio de danificação ao redor dos alvéolos. Os patamares máximos de carga atingidos são apresentados na Tabela 11.

Tabela 11 – Exemplo 4: Carga máxima atingida para diferentes parâmetros de convergência.

	$\alpha_3 = 1,0$	$\alpha_3 = 1,1$	$\alpha_3 = 1,3$	$\alpha_3 = 1,5$
$\alpha_1 = 1,00$	4 kN	3 kN	4 kN	3 kN
$\alpha_1 = 0,95$	4 kN	3 kN	5 kN	11 kN
$\alpha_1 = 0,90$	2 kN	1 kN	7 kN	6 kN

Fonte: o próprio autor.

Da mesma forma que ocorreu para a laje *bubbledeck*, aplicar as estratégias de convergência em alguns casos elevou o patamar máximo de carga alcançado pela simulação, em especial com $\alpha_1 = 0,95$ e $\alpha_2 = 1,5$, mas ainda de forma insuficiente para a captura do comportamento não linear físico da laje. Estes resultados reforçam a hipótese da incompatibilidade do modelo de dano adotado com a técnica de exclusão.

6 CONCLUSÕES

Simulações computacionais são de suma importância no estudo das Estruturas por uma variedade de razões, como o corte de custos com experimentos e a análise de parâmetros de difícil observação. Esta importância é reforçada pelo fato de a grande maioria dos estudos experimentais da literatura que foram revisados durante a presente pesquisa estarem associados a análises numéricas.

Este trabalho propôs uma alternativa a estas simulações aplicando o MEFP e estudou suas vantagens e desvantagens. Embora na literatura a imersão de elementos seja praticamente uma constante na representação de barras de aço, notou-se que esta técnica é pouco explorada para outros tipos de componentes, em especial vazios. A dificuldade da elaboração de malhas, especialmente para lajes *bubbledeck*, tornou populares técnicas de aproximação da seção transversal por camadas e de homogeneização das propriedades materiais, por exemplo.

O modelo de dano implementado é uma adaptação do modelo de Mazars, amplamente aplicado ao concreto. Aplicar esta versão do modelo viabilizou a simulação de diversos ensaios presentes na literatura sem a necessidade de calibrar parâmetros sem significado físico. A possibilidade de modelar o dano exclusivamente a partir de propriedades ensaiadas do concreto garantiu credibilidade aos resultados.

A criação de um código computacional próprio proporcionou grande controle sobre todos os aspectos da simulação. A imensa maioria dos estudos experimentais da literatura realiza simulações com *softwares* comerciais, que embora robustos, são pouco maleáveis no que diz respeito às teorias que utilizam.

A escolha pela elaboração de um código próprio também trouxe a liberdade de realizar análises específicas, como a observação do padrão de danificação nas análises com vazios que não foram bem sucedidas, possibilitando a investigação dos fenômenos associados a estes casos.

Com a programação concluída e as simulações realizadas, a teoria de elementos finitos direcionada a lajes *steeldeck*, *bubbledeck* e alveolar e associada ao modelo de dano contínuo, bem como a sua implementação, foram validadas com sucesso dentro de algumas limitações, algumas delas já esperadas.

A teoria adaptada de dano contínuo se mostrou perfeitamente adequada para aplicação em diversos casos, inclusive quando o concreto é associado a inclusões como barras de aço e *decks*. A derivação dos parâmetros de dano a partir de um número reduzido de propriedades se mostrou efetiva e viabilizou a simulação de ensaios presentes na literatura sem a necessidade da calibração de parâmetros adicionais. Os resultados não

observaram dependência da malha adotada, embora tenha sido aferido que malhas mais refinadas aumentem o patamar máximo de carga no qual se alcança a convergência sob os parâmetros de tolerância adotados.

A utilização da imersão para o *deck* das lajes *steeldeck* obteve sucesso dentro da limitação teórica de aderência perfeita. Embora não seja possível ignorar o efeito do descolamento a partir de certo patamar de carregamento, a simulação realizada reproduziu adequadamente o comportamento da estrutura antes de sua ocorrência, bem como resultados presentes na literatura de simulações com a consideração da aderência.

A respeito das exclusões, houve sucesso na reprodução dos trechos sem não linearidade física nas simulações realizadas para lajes *bubbledeck* e alveolar, atestando o funcionamento adequado de elementos imersos não só no incremento, mas também no decremento de rigidez da matriz.

No entanto, foram observadas grandes dificuldades ao associar elementos de exclusão ao modelo de dano adotado. Com a observação do padrão de danificação, notou-se que o dano surge em pontos de integração próximos aos vazios e eventualmente se espalha rapidamente por toda a estrutura, impossibilitando a convergência da simulação. As estratégias de convergência propostas não foram suficientes para mitigar este problema.

Aplicando as estratégias propostas, a aplicação conjunta de elementos de exclusão com o modelo de dano selecionado não se mostrou efetiva para reproduzir o comportamento não linear de ensaios de lajes *bubbledeck* e alveolar, apontando para a possibilidade de que as duas técnicas são incompatíveis. Ademais, esta questão merece investigações mais aprofundadas.

6.1 Perspectivas para futuros trabalhos

Partindo do que foi desenvolvido, são propostos para desenvolvimentos futuros:

- modelar o *deck* das lajes *steeldeck* de forma desvinculada aos nós da matriz, de modo que possa ser introduzida uma teoria de escorregamento entre as interfaces;
- revisar a discretização dos elementos que representam os vazios, realizando uma análise paramétrica adicional na associação do dano a problemas com exclusões, visto que na presente pesquisa a discretização dos elementos de exclusão foi fixa;
- associar à formulação outras teorias de dano contínuo, comparando com a performance da teoria adotada no presente trabalho, em especial em relação à sua compatibilidade com elementos de exclusão;
- aplicar a formulação a outros tipos de estrutura, como lajes nervuradas e vigas sanduíche.

REFERÊNCIAS

- ABDULLAH, R.; PATON-COLE, V. P.; EASTERLING, W. S. Quasi-static analysis of composite slab. **Malaysian Journal of Civil Engineering**, v. 19, n. 2, 2007. DOI: <https://doi.org/10.11113/mjce.v19.15748>.
- AL-GASHAM, T. S.; MHALHAL, J. M.; JABIR, H. A. Improving punching behavior of interior voided slab-column connections using steel sheets. **Engineering Structures**, v. 199, Nov. 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109614>.
- ALFARAH, B.; LÓPEZ-ALMANSA, F.; OLLER, S. New methodology for calculating damage variables evolution in plastic damage model for RC structures. **Engineering Structures**, v. 132, p. 70–86, Feb. 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.11.022>.
- ALVARES, M. S. **Estudo de um modelo de dano para o concreto**: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos. 1993. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.
- ARRUDA, M. *et al.* A modified Mazars damage model with energy regularization. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 259, Jan. 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.108129>.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800**: Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edificações. Rio de Janeiro: ABNT, 2021.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14861**: Lajes alveolares pré-moldadas de concreto protendido. Rio de Janeiro: ABNT, 2022.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro: ABNT, 2023.
- BONET, J. *et al.* Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, Nov. 2000. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00428-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00428-4).
- CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Triangular based prismatic finite element for the analysis of orthotropic laminated beams, plates and shells. **Composite Structures**, v. 168, p. 234–246, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.02.027>.
- CARRAZEDO, R.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Active face prismatic positional finite element for linear and geometrically nonlinear analysis of honeycomb sandwich plates and shells. **Composite Structures**, v. 200, p. 849–863, Sept. 2018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.06.009>.
- CARRAZEDO, R. *et al.* Vibration and stress analysis of orthotropic laminated panels by active face prismatic finite element. **Composite Structures**, v. 244, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112254>.

CHUNG, J.-H. *et al.* Two-way flexural behavior of donut-type voided slabs. **International Journal of Concrete Structures and Materials**, v. 12, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1186/s40069-018-0247-6>.

CHUNG, L. *et al.* Investigations on flexural strength and stiffness of hollow slabs. **Advances in Structural Engineering**, v. 13, n. 4, p. 591–601, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1260/1369-4332.13.4.591>.

CIRAK, F.; ORTIZ, M.; PANDOLFI, A. A cohesive approach to thin-shell fracture and fragmentation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, p. 2604–2618, 2005. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.07.048>.

CODA, H. B. **O Método dos Elementos Finitos Posicional**. São Carlos: EESC/USP, 2018. v. 1.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33-35, p. 3541–3557, Aug. 2004. DOI: <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.01.005>.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, v. 40, p. 185–200, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-006-0094-1>.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. **Applied Mathematical Modelling**, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, Apr. 2010. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.07.020>.

CUENCA, E.; SERNA, P. Failure modes and shear design of prestressed hollow core slabs made of fiber-reinforced concrete. **Composites Part B: Engineering**, v. 45, p. 952–964, Feb. 2013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.06.005>.

DAVIS, P. J.; RABINOWITZ, P. **Methods of Numerical Integration**. 2. ed. San Diego: Academic Press, 1984.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1994-1-1 Eurocode 4: Design of composite steel and concrete structures – part 1-1: General rules and rules for buildings**. Brussels: European Committee for Standardization, 2004.

FÉLIX, E. F. **Estudo numérico-experimental da fadiga em concretos submetidos a compressão cíclica**: proposição de um modelo de dano acumulado. 2022. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

GHOLAMHOSEINI, A. *et al.* Longitudinal shear stress and bond–slip relationships in composite concrete slabs. **Engineering Structures**, v. 69, p. 37–48, June 2014. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.03.008>.

GIRHAMMAR, U. A.; PAJARI, M. Tests and analysis on shear strength of composite slabs of hollow core units and concrete topping. **Construction and Building Materials**, v. 22, n. 8, p. 1708–1722, Aug. 2008. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2007.05.013>.

- GRECO, M. *et al.* Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, n. 12, p. 1079–1086, Aug. 2006. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2006.04.007>.
- GUL, A. *et al.* Experimental study on the structural behavior of cast in-situ hollow core concrete slabs. **Civil Engineering Journal**, v. 6, n. 10, p. 1983–1991, Oct. 2020. DOI: <https://doi.org/10.28991/cej-2020-03091597>.
- HAMMER, P. C.; MARLOWE, O. J.; STROUD, A. H. Numerical integration over simplexes and cones. **Mathematical Tables and Other Aids to Computation**, v. 10, n. 55, p. 130–137, 1956. DOI: <https://doi.org/10.2307/2002483>.
- HASHEMI, S. S. *et al.* Evaluation of ductility of RC structures constructed with bubble deck system. **International Journal of Civil Engineering**, v. 16, p. 513–526, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40999-017-0158-y>.
- HOSSAIN, K.; ATTARDE, S.; ANWAR, M. Finite element modelling of profiled steel deck composite slab system with engineered cementitious composite under monotonic loading. **Engineering Structures**, v. 186, p. 13–25, May 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.02.008>.
- IBRAHIM, A. M.; ALI, N. K.; SALMAN, W. D. Flexural capacities of reinforced concrete two-way bubbledeck slabs of plastic spherical voids. **Diyala Journal of Engineering Sciences**, v. 6, n. 2, p. 9–20, June 2013. DOI: <https://doi.org/10.24237/djes.2013.06202>.
- INTEL oneAPI Base Toolkit. Versão 2023.1.0. [S.l.]: Intel Corporation, 2023. Disponível em: <https://www.intel.com/content/www/us/en/developer/tools/oneapi/base-toolkit.html>. Acesso em: 10 de agosto de 2023.
- INTEL oneAPI Math Kernel Library. Versão 2023.1. [S.l.]: Intel Corporation, 2023. Disponível em: <https://www.intel.com/content/www/us/en/developer/tools/oneapi/onemkl.html>. Acesso em: 10 de agosto de 2023.
- INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE. **The FIB Model Code 2010 for Concrete Structures**. Lausanne: FIB, 2010.
- KATTAN, P. I.; VOYIADJIS, G. Z. A coupled theory of damage mechanics and finite strain elasto-plasticity—i. damage and elastic deformations. **International Journal of Engineering Science**, v. 28, n. 5, p. 421–435, Jan. 1990. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(90\)90007-6](https://doi.org/10.1016/0020-7225(90)90007-6).
- KIM, H.-Y.; JEONG, Y.-J. Ultimate strength of a steel–concrete composite bridge deck slab with profiled sheeting. **Engineering Structures**, v. 32, n. 2, p. 534–546, Feb. 2010. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.10.014>.
- KUMAR, M. V. *et al.* Analytical investigation of the influence of various void shape and spacing on the load-bearing behavior of concrete hollow core slabs. **Journal of Building Pathology and Rehabilitation**, v. 7, n. 4, p. 4, Nov. 2022. DOI: <https://doi.org/10.1007/s41024-021-00141-2>.
- LANDKOF, B.; GOLDSMITH, W. Petalling of thin, metallic plates during penetration by cylindro-conical projectiles. **International Journal of Solids and Structures**, v. 21, n. 3, p. 245–266, 1985. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(85\)90021-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(85)90021-6).

LIN, Y. Design of prestressed hollow core slabs with reference to web shear failure. **Journal of Structural Engineering**, v. 120, n. 9, p. 2675–2696, Sept. 1994. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1994\)120:9\(2675\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1994)120:9(2675)).

MAZARS, J. **Application of the damage mechanics to the nonlinear behavior and to the failure of structural concrete**. 1984. Thesis (Doctoral) - University of Paris, Paris, 1984.

MELLO, J. H. L. P. *et al.* Longitudinal shear strength design of composite slabs by full-scale fe modelling considering the embossments. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 17, n. 5, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1590/s1983-41952024000500005>.

MICROSOFT Visual Studio Community 2022. Versão 17.8.6. [S.l.]: Microsoft Corporation, 2022. Disponível em: <https://visualstudio.microsoft.com/pt-br/>. Acesso em: 10 de agosto de 2023.

MURAKAMI, S. Mechanical modeling of material damage. **Journal of Applied Mechanics**, v. 55, n. 2, p. 280–286, June 1988. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3173673>.

OUKAILI, N.; MERIE, H. Reduced area approach for predicting punching shear resistance of biaxial hollow slabs with openings. **Results in Engineering**, v. 19, Sept. 2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2023.101261>.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. **AcadView**: Software para pós-processamento em elementos finitos 2D e 3D. São Carlos: SET/EESC/USP, 2005. Disponível em: <https://set.eesc.usp.br/software/acadview/>. Acesso em: 10 de agosto de 2023.

PACCOLA, R. R.; PIEDADE NETO, D.; CODA, H. B. Geometrical non-linear analysis of fiber reinforced elastic solids considering debonding. **Composite Structures**, v. 133, p. 343–357, Dec. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.07.097>.

PATRICK, M.; BRIDGE, R. Q. Partial shear connection design of composite slabs. **Engineering Structures**, v. 16, n. 5, p. 348–362, July 1994. DOI: [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(94\)90028-0](https://doi.org/10.1016/0141-0296(94)90028-0).

PIEPADE NETO, D.; PACCOLA, R. R. **SparseSET**: symmetric sparse matrix manipulation routines. São Carlos: SET/EESC/USP, 2020.

RÍOS, J. D. *et al.* Numerical modelling of the shear-bond behaviour of composite slabs in four and six-point bending tests. **Engineering Structures**, v. 133, p. 91–104, Feb. 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.12.025>.

SAHOO, S. *et al.* Experimental and numerical study on behaviour of fibre reinforced lightweight hollow core slabs under different flexure to shear ratios. **Structures**, v. 50, p. 1264–1284, Mar. 2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.02.099>.

SAMPAIO, M. S.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Fully adherent fiber–matrix FEM formulation for geometrically nonlinear 2D solid analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 66, p. 12–25, Apr. 2013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.finel.2012.10.003>.

SILVA, R. C. S. **Análise tridimensional multifísica da difusão de cloretos em estruturas de concreto armado: uma abordagem pelo método dos elementos finitos**. 2023. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, 2023.

STARK, J. W. B. Design of composite floors with profiled steel sheet. *In: INTERNATIONAL SPECIALTY CONFERENCE ON COLD-FORMED STEEL STRUCTURES*, 4., 1978. **Proceedings** [...]. Missouri: Missouri University of Science and Technology, 1978. p. 893–922. Disponível em: <https://scholarsmine.mst.edu/isccss/4iccfss/4iccfss-session4/3>. Acesso em: 5 de outubro de 2023.

TEJA, P. *et al.* Structural behavior of bubble deck slab. *In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ADVANCES IN ENGINEERING, SCIENCE AND MANAGEMENT*, 2012. **Proceedings** [...]. Piscataway: IEEE, 2012. p. 383–388.

VANALLI, L.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A simple way to introduce fibers into FEM models. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 24, p. 585–603, 7 2008. ISSN 1069-8299. DOI: <https://doi.org/10.1002/cnm.983>.

WARIYATNO, N. G.; HARYANTO, Y.; SUDIBYO, G. H. Flexural behavior of precast hollow core slab using PVC pipe and styrofoam with different reinforcement. **Procedia Engineering**, v. 171, p. 909–916, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.01.388>.

ZHANG, X. *et al.* Micro ct image-based simulations of concrete under high strain rate impact using a continuum-discrete coupled model. **International Journal of Impact Engineering**, v. 149, Mar. 2021.

